

MODEL EPIDEMI SIRS DENGAN TIME DELAY PADA *INFECTED* (Terinfeksi Penyakit)

Ferdinand Sinuhaji

Dosen Universitas Quality Berastagi
Email : sinuhajiferdinand@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan mengidentifikasi apakah time delay pada *infected* (terinfeksi penyakit) memengaruhi atau tidak mempengaruhi stabilitas pada kesetimbangan bebas penyakit dan pada kesetimbangan endemic penyakit. Time delay dalam pengertian pada penelitian ini adalah pada waktu *infected* (terinfeksi penyakit). Time delay pada penelitian ini di fokuskan pada model spesifik tunggal, dengan menghitung keadaan sementara dan keadaan permanen dari penyebaran penyakit.

Model SIRS yang digunakan pada penelitian ini dengan asumsi bahwa semua individu yang telah sembuh tidak mempunyai kekebalan yang permanen terhadap penyakit, sehingga akan kembali masuk ke dalam kelas rentan penyakit model epidemi SIRS ini membagi populasi menjadi empat subpopulasi yaitu *Susceptible*, *Infective*, *Recovered* dan *Susceptible*.

Penelitian ini dilakukan dengan merevisi kompartemen model epidemi SIRS yang selanjutnya digunakan untuk menentukan persamaan pembangunan model yang direpresentasikan dalam sistem persamaan differensial. Sistem tersebut menggambarkan interaksi antara subpopulasi dengan populasi lainnya.

Hasil penelitian diketahui bahwa kesetimbangan bebas penyakit stabil global untuk semua $\tau > 0$ ketika jumlah bilangan $R_0 < 1$. Dapat dikatakan, time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) tidak dapat mempengaruhi kestabilan kesetimbangan bebas penyakit. Dengan kata lain, pengaruh time delay pada *infected* (terinfeksi penyakit) dapat diabaikan untuk $R_0 < 1$. Namun, ketika, $R_0 > 1$ kestabilan kesetimbangan endemi akan dipengaruhi oleh time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit).

Kata kunci: sirs, model epidemi sirs, time delay pada *infected*.

Abstract

This study aims to identify whether the healing time delay period affects or does not affect the stability of disease-free equilibrium and the equilibrium of disease endemic. Time delay in the sense of this study is the time period of infected. Time delay in this study is focused on a single specific model, by calculating the temporary and permanent state of the spread of the disease.

The SIRS model used in this study with the assumption that all individuals who have infected do not have permanent immunity to the disease, so they will return to the disease-prone class. The SIRS epidemic model divides the population into four subpopulations namely Susceptible, Infective, Recovered and Susceptible.

This research was conducted by revising the SIRS epidemic model compartment which was then used to determine the model development equations represented in differential equation systems. The system describes the interaction between subpopulations with other populations. The results show that global disease-free equilibrium is stable for all $\tau > 0$ when the number of numbers is $R_0 < 1$. It can be said that the time delay of the infected period cannot affect the stability of disease-free equilibrium. In other words, the effect of the time delay infected period can be negligible for $R_0 < 1$. However, when, $R_0 > 1$ the stability of endemic equilibrium will be affected by the time delay of the infected period.

Keywords: sirs, sirs epidemic model, time delay infected period.

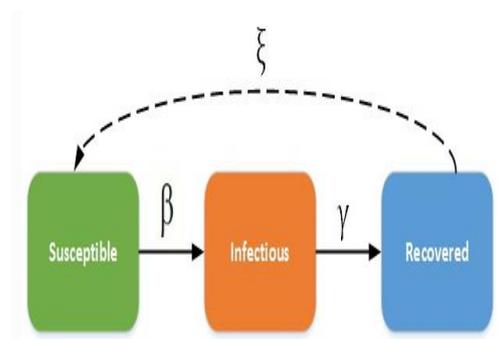
Pendahuluan

Model matematika adalah model yang menggambarkan suatu permasalahan dalam persamaan matematika. Persamaan model matematika merupakan pendekatan terhadap suatu fenomena fisik. Pada model matematika tiruan tersebut disajikan dengan mendeskripsikan fenomena alam dengan satu set persamaan. Kecocokan model terhadap fenomena tersebut bergantung dari ketetapan formulasi persamaan matematis dalam mendeskripsikan fenomena alam yang ditirukan.

Time delay adalah pemodelan masalah nyata dalam arti persamaan diferensial tunda atau persamaan diferensial dengan argument yang diperlambat. Pada umumnya time delay (τ) dimasukkan ke dalam suatu insidensi yang ada dalam model sebagai sebuah parameter, dimana parameter tersebut kerap kali menyebabkan perubahan pada sifat kestabilan dari titik kesetimbangan, sehingga analisis yang dilakukan adalah mengidentifikasi apakah time delay infected tersebut menyebabkan perubahan pada sifat kestabilan dari titik kesetimbangan atau tidak.

Epidemi merupakan suatu keadaan berjangkitnya suatu penyakit menular dalam populasi pada suatu tempat yang melebihi perkiraan yang normal dalam periode yang singkat. Bila penyakit tersebut selalu terdapat dalam suatu tempat begitupun dengan faktor penyebabnya maka dikatakan *endemik*, kemudian bila penyakit tersebut mempunyai ruang lingkup penyebaran yang sangat luas maka disebut *pandemik*.

Model teori epidemi untuk penyakit diilustrasikan pada gambar dibawah ini



Gambar 1. Model Epidemi SIRS

Model epidemic sirs menggambarkan bahwa individu yang terinfeksi penyakit (*Infected*), kemudian sembuh (*Recovered*), setelah sembuh, individu memperoleh kekebalan sementara terhadap penyakit tersebut. Seiring berjalan waktu kekebalan tersebut menghilang atau berkurang, mengakibatkan individu yang rentan terserang penyakit tersebut dapat kembali terinfeksi penyakit yang sama. Sistem persamaan diferensialnya menjadi :

$$\frac{ds}{dt} = -\beta SI + \gamma R, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \gamma R \quad (3)$$

Rumusan masalah pada penelitian ini membahas bagaimana menurunkan model matematisnya untuk epidemi SIRS dengan time delay periode terinfeksi penyakit sehingga menghasilkan model epidemi, dari model epidemi tersebut akan terbentuk suatu sistem persamaan diferensial.

Dari persamaan diferensial yang sudah terbentuk tadi dapat dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan epidemi kemudian menganalisis kestabilannya.

Kemudian mengidentifikasi apakah time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) tersebut mempengaruhi atau tidak mempengaruhi stabilitas pada kesetimbangan bebas penyakit dan pada kesetimbangan endemi

penyakit dengan memodifikasi pada dinamika transmisinya.

Tujuan penelitian ini adalah mengidentifikasi apakah time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) mempengaruhi atau tidak mempengaruhi stabilitas pada kesetimbangan bebas penyakit dan pada kesetimbangan endemic penyakit.

Tinjauan Pustaka

A. Diferensial Autonomus

(Boyce dan Diprima ((2001) Misalkan suatu persamaan diferensial *autonomous* dinyatakan sebagai berikut

$$m = Y(x) \quad (4)$$

Dengan Y adalah fungsi kontinu bernilai real dari x dan mempunyai turunan parsial kontinu. Pada persamaan (4) disebut persamaan diferensial *autonomous* karena tidak menandatangani t di dalam. Apabila (4) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan a_{ij} adalah bilangan riil maka system (4) merupakan system persamaan diferensial *autonomous* linear.

B. Persamaan Diferensial

Jenis persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua jenis yaitu persamaan diferensial biasa dan diferensial parsial.

1. Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial biasa jika semua turunannya dengan satu peubah saja. Contoh : $dx/dt = 5x + ty$.
2. Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial parsial jika turunannya dengan dua atau lebih peubah. Contoh : $d^2v/dx^2 + d^2y/dy^2 = 2/c^2 dv/dt$.

C. Pada titik kesetimbangan dan kestabilan

(Haberman (1987)) Dengan menggunakan titik kesetimbangan maka suatu sistem dapat lebih memudahkan

untuk mengamati perilaku kestabilannya. Berikut ini adalah definisi titik kesetimbangan.

Pengertian 1 Titik kesetimbangan adalah sebuah keadaan dari suatu sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Jika sistem dinamika dituangkan dalam bentuk persamaan diferensial maka titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama yang sama dengan nol. Suatu titik $m^* \in R$ disebut titik kesetimbangan dari system persamaan $m = F(x)$, ε jika memenuhi persamaan $f(m^*) = 0$. Dalam sistem epidemiologi dikenal titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemic.

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah dimana sudah tidak ada lagi penyakit yang menyerang dalam populasi sedangkan titik kesetimbangan endemic adalah dimana penyakit selalu menetap dalam populasi. Berikut ini adalah definisi kestabilan titik kesetimbangan menurut (Guckenheimer dan Holmes (1983)).

Pengertian 2

1. Kestabilan titik kesetimbangan dari sistem $m = Fx$ dan m^0 adalah titik asal. 2. Kestabilan disebut stabil asimtotik, jika m^* stabil dan terdapat $b > 0$
3. Kestabilan disebut tidak stabil, jika terdapat suatu $= 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang terdapat sebuah $\lambda = 0$ m^0 . Jika kondisi awal berada sangat dekat dengan kestabilan dan solusi sistem cenderung mendekati titik kesetimbangan kestabilan, maka sistem disebut stabil asimtotik. Jika sifat solusi menjauh dari titik kesetimbangan kestabilan akibat perubahan kecil pada kondisi awal maka sistem disebut tidak stabil.

Teorema 1 (Finizio dan Ladas (1982)) Jika matriks A pada sistem persamaan (1) adalah matriks koefisien dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, maka titik kesetimbangan m^* disebut :

1. Stabil, jika $(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$
2. Stabil asimtotik, $(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$
3. Tidak stabil, $(\lambda_s) > 0$, untuk suatu s

Pada teorema (1) dapat dipergunakan untuk menentukan kestabilan lokal suatu titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan yang stabil atau stabil asimtotik hanya pada suatu daerah tertentu dalam lingkup solusi sistem dikatakan stabil lokal atau stabil asimtotik. Titik kesetimbangan dikatakan stabil global atau stabil asimtotik global jika titik kesetimbangan tersebut atau stabil asimtotik pada setiap lingkup solusi sistem.

D. Reproduksi dasar (R_0)

(Hethcote (2000)) Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan parameter yang penting dalam matematika epidemiologi yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Bilangan ini diperoleh dengan cara menentukan nilai eigen matriks jacobian pada titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) dan titik kesetimbangan endemic (*endemic equilibrium*). (Liu (2013)) (R_0) adalah nilai yang menunjukkan apakah penyebaran penyakit menjadi epidemi atau tidak epidemi pada suatu populasi.

$$R_0 = \frac{b\beta_1}{d(d + \varrho + \delta)} \quad (6)$$

E. Model Epidemii SIRS

(Enatsu dan Messina, 2012), Infeksi penyakit dikatakan endemic apabila setiap orang yang terinfeksi penyakit akan menularkan ke individu yang lain. Ketika individu tersebut tidak hilang dan jumlah orang yang terinfeksi bertambah, maka infeksi tersebut dikatakan berada dalam keadaan endemic. Model SIRS (*Susceptible* → *Invected* → *Recovered* → *Susceptible*) adalah model epidemic yang mengasumsikan bahwa individu yang sembuh tidak memiliki kekebalan alami terhadap penyakit yang bersangkutan sehingga individu yang sembuh akan kembali menjadi individu yang rentan penyakit. Model SIRS menggambarkan bahwa individu yang telah terinfeksi penyakit (*invected*), kemudian sembuh (*recovered*), setelah sembuh, individu memperoleh kekebalan sementara terhadap penyakit tersebut. Seiring berjalan waktu kekebalan tersebut akan menghilang atau

berkurang, mengakibatkan individu yang rentan terserang penyakit dapat kembali terinfeksi penyakit yang sama.

F. Penambahan dinamika transmisi

(Huitao et al (2013)) dalam penelitiannya pada media coverage memodifikasi dinamika transmisi menjadi seperti berikut :

$$g(I(t - \tau)) = \beta_1 - \frac{\beta_2 I(t - \tau)}{m + I(t - \tau)}, \quad (7)$$

Dimana $\tau > 0$ adalah time delay pada *infected* (terinfeksi penyakit) yang mewakili periode laten media pada coverage. Penulis memodifikasi dinamika tranmisi menjadi seperti berikut, secara umum model epidemic SIRS dapat dirumuskan menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b - dS - g(I)S + \gamma R, \\ \frac{dI}{dt} &= g(I)S - (d + \varrho + \delta)I. \quad (8) \\ \frac{dR}{dt} &= \varrho I - (d + \gamma)R, \end{aligned}$$

Kemudian model (10), menjadi seperti berikut ini (11):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b - dS - \left\{ \beta_1 - \frac{I}{\beta_2 + mI} \right\} SI + \gamma R, \\ \frac{dI}{dt} &= \left\{ \beta_1 - \frac{I}{\beta_2 + mI} \right\} SI - (d + \varrho + \delta)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \varrho I - (d + \gamma)R, \end{aligned}$$

Sehingga dinamika transisi pada penularan penyakit dapat dimodifikasi sebagai berikut ini :

$$g(I(t - \tau)) = \beta_1 - \frac{I(t - \tau)}{\beta_2 + mI(t - \tau)} \quad (9)$$

di mana penulis mendefinisikan $\tau > 0$ adalah time delay periode kesembuhan yang diartikan sebagai waktu periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) dari individu *invected* sampai menjadi individu *recovered*.

G. Titik kesetimbangan bebas Penyakit (E_0)

Titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) adalah suatu keadaan dimana tidak terjadi penyebaran penyakit dalam populasi. Pertama terlebih menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit, misalkan titik tersebut dituliskan $E_0 = (S_0, I_0, R_0)$. Karena populasi bebas dari penyakit maka $I_0 = 0$, yaitu suatu keadaan dimana titik terjadi infeksi pada populasi. Untuk mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dimana $\tau = 0$. **Teorema 1**, untuk setiap time delay pada *infected* (terinfeksi penyakit) $\tau \geq 0$, penulis mempergunakan :

1. Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) adalah stabil asimtotik local jika $R_0 < 1$.
2. Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) adalah tidak stabil jika $R_0 > 1$.

H. Pada titik kesetimbangan epidemic (E^*)

Jika semua individu rentan maka $S = (S^0) = \frac{b}{d}$, dan karena rentang waktu hidup manusia yang terinfeksi adalah $\frac{1}{d(d + \varrho + \delta)}$, berarti $R_0 = \frac{b\beta_1}{d(d + \varrho + \delta)}$

I. Asumsi Pemodelan

Dalam pemodelan epidemic SIRS sesuai dengan model klasik epidemic SIR dengan asumsi :

1. Populasi diasumsikan terbuka (ada proses migrasi), yaitu ada populasi yang masuk dan keluar dari populasi tersebut.
2. Individu yang telah sembuh $R(t)$ diasumsikan tidak mempunyai kekebalan yang permanen terhadap penyakit yang bersangkutan, sehingga akan masuk kembali ke dalam kelas rentan penyakit $S(t)$ dengan laju konstan γ
3. Individu yang telah sembuh dari sakit memiliki kekebalan sementara.
4. Semua parameter diasumsikan positif

5. Time delay yang diartikan sebagai waktu periode *invected* sampai menjadi individu *recovered*.

Hasil dan pembahasan

A. Hasil Penelitian

Penurunan model epidemi SIRS dengan time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) adalah sebagai berikut :

1. Laju perubahan populasi *Susceptible* per satuan waktu dipengaruhi oleh laju penambahan rekrutmen pada populasi manusia (b). Populasi *Susceptible* sepanjang waktu (t) akan berkurang akibat laju kematian alami pada *Susceptible* ($dS(t)$) dan dipengaruhi kekuatan penyebaran infeksi pada *Susceptible* β_1 dan akan berkurang akibat adanya $I/\beta_2 + mI$ dengan dipengaruhi time delay periode kesembuhan dan kekuatan penyebaran infeksi dipengaruhi pada *recovered*

γ dan berpengaruh laju antara individu yang terjangkit penyakit menjadi individu terinfeksi kemudian individu yang telah sembuh maka dapat ditulis :

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - dS(t) - \left\{ \beta_1 - \frac{I(t - \tau)}{\beta_2 + mI(t - \tau)} \right\}$$

2. Laju perubahan populasi *Invected* per satuan waktu dipengaruhi oleh penambahan populasi *invected* sepanjang waktu (t) akibat kekuatan penyebaran infeksi pada *susceptible* β_1

Dan akan berkurang akibat adanya $I/\beta_2 + mI$ dengan dipengaruhi time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) bertambahnya populasi *Invected* per satuan waktu dipengaruhi faktor laju kematian alami, laju kesembuhan tiap individu yang sakit menjadi individu rentan, laju kematian tiap individu yang disebabkan oleh penyakit pada populasi yang terinfeksi penyakit *invected* $d + \varrho + \delta)I(t)$ dan laju perubahan yang rentan menjadi terinfeksi pada populasi

Invected, maka dapat ditulis :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \left\{ \beta_1 - \frac{I(t-\tau)}{\beta_2 + mI(t-\tau)} \right\} S(t)I(t)$$

2. Laju perubahan populasi *Recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh pertambahan populasi *Recovered* per satuan waktu merupakan akibat laju perubahan status dari terinfeksi penyakit terhadap populasi *Invected* (\mathcal{I})(t) dan berpegaruh antara individu yang terjangkit penyakit menjadi individu terinfeksi kemudian individu yang telah sembuh.

Selain itu, berkurangnya populasi *Recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh laju kematian alami tiap individu d pada populasi *Recovered* dan laju kehilangan kekebalan tiap individu terhadap penyakit dan akan kembali menjadi individu rentan penyakit γ , maka

$$\text{dapat ditulis } \frac{dR(t)}{dt} = \mathcal{I}(t) - d + \gamma R(t)$$

B. Pembahasan

Contoh model epidemi SIRS dengan time delay periode kesembuhan

Contoh pertama dan contoh kedua membahas sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) dengan memperhatikan kestabilan titik kesetimbangannya. Contoh ini bertujuan memberikan gambaran mengenai sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) dengan memberikan dan memperhatikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi nilai bilangan reproduksi dasar R_0 dalam teorema-teorema yang telah diberikan.

Dalam penelitian ini dianalisis kesetimbangan dan kestabilan untuk dua kondisi, yaitu ketika $R_0 < 1$ pada saat $\tau > 0$, dimana kesetimbangan bebas penyakit stabil karena time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) tidak dapat mempengaruhi kestabilan kesetimbangan bebas penyakit dan ketika $R_0 > 1$, kestabilan kesetimbangan endemi akan dipengaruhi oleh time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit). Pada

contoh ketiga akan membahas model SIRS dengan tanpa time delay periode kesembuhan. Contoh ini bertujuan untuk memperbandingkan model SIRS dengan time delay periode kesembuhan dan tanpa time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit).

Contoh 1 Jika $R_0 < 1$

Perilaku sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) diperlihatkan dengan pertama kali menentukan nilai parameternya. Nilai-nilai parameter adalah sebagai berikut dimana nilai $b = 40$, $d = 0,09$, $\beta_1 = 0,0006$, $\beta_2 = 0,00054$, $m = 70$, $\delta = 0,8$, $\mathcal{I} = 0,09$, $\gamma = 0,08$

Dengan $b/d = 986$, sesuai dengan (6) penulis menghitung $R_0 = 0,7481 < 1$ selain itu penulis mendapatkan bebas penyakit $E_0 = (869,0,0)$ Dari teorema

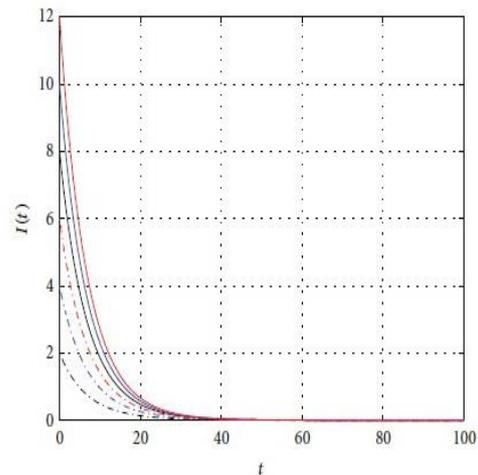
,diketahui diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 adalah stabil asimtotik lokal untuk setiap saat time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) $\tau \geq 0$.

Contoh 2 Jika $R_0 > 1$

Perilaku sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) diperlihatkan dengan pertama kali menentukan nilai parameternya. Nilai-nilai parameter adalah sebagai berikut : $b = 50$, $d = 0,05$, $\beta_1 = 0,0005$, $\beta_2 = 0,00054$, $m = 70$, $\delta = 0,8$, $\mathcal{I} = 0,09$, $\gamma = 0,08$ Dengan $b/d = 986$, sesuai dengan (6) penulis menghitung $R_0 = 0,7456 > 1$ selain itu penulis mendapatkan bebas penyakit $E_0 = (896,0,0)$ dan titik kesetimbangan $E_0 = (278,0759, 53,1432, 59,7131)$. Dengan demikian dari teorema (1) diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) adalah tidak stabil asimtotik lokal untuk setiap saat time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) $\tau \geq 0$ dan titik kesetimbangan E^* adalah stabil untuk $\tau \in [0,75,12576)$.

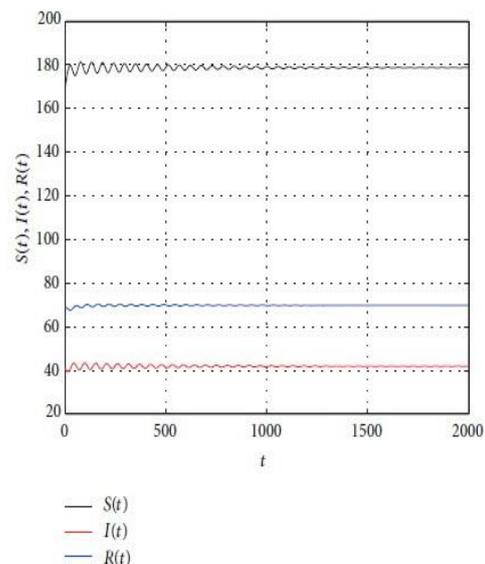
Contoh 3 Model Sirs tanpa time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit).

Salah satu perbedaan dengan time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) dan tanpa time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) terletak pada metode yang akan digunakan untuk menganalisis model dengan time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) dengan tanpa time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit). Menganalisis untuk model dengan time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) biasanya lebih kompleks dan masih jarang metode yang telah ditemukan. Diberikan nilai parameter pada contoh ketiga : $b = 40$, $d = 0,09$, $g = 0,0007$, $\delta = 1$, $\varrho = 0,1$, $\gamma = 0,4$ dengan $b/d = 716$ didapatkan hasilnya $R_0 = 0,7746 < 1$ dan $R_0 = 7,5866 > 1$. Jika $R_0 > 1$ titik kesetimbangan $E^*=(182.5610,46.6817,60.3476)$. Sekarang akan diperbandingkan dengan model dengan time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit). Setelah dihitung nilai $R_0 < 1$ dan hasil $R_0 > 1$ hasilnya adalah sama dengan time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit). Kemudian diketahui jika $R_0 < 1$ pada titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) tanpa time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) juga sama yaitu adalah stabil asimtotik dapat dikatakan bahwa pengaruh time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) tidak mempengaruhi. Ketika, $R_0 > 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan titik kestabilan kesetimbangan endemic akan dipengaruhi oleh time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit).

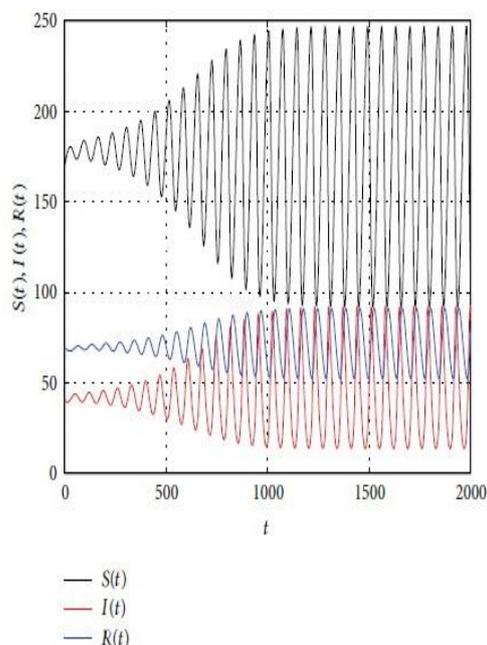


Gambar 2. Lintasan dari $I(t)$ dengan $\tau = 5,15,25,35,55,75$.

Pada Gambar 2 diambil dari berdasarkan titik kesetimbangan bebas penyakit dengan memberikan time delay Infected dari 5 sampai 75 yang menunjukkan bahwa (E_0) stabil.



Gambar 3. Lintasan Grafik dari solusinya.



Gambar 4. Lintasan dan grafik system

Contoh 4 Pendekatan dengan kuantitatif

Pada bagian ini akan membandingkan hasil analisis data yang telah didapatkan sebelumnya dengan menggunakan secara kuantitatif sehingga diperoleh signifikansi hubungan antar parameter yang diteliti. Untuk menghitung $R_0 < 1$, diberikan : $b = 40$, $d = 0,2$, $\beta_1 = 0,25$, $\beta_2 = 0,04$, $m = 0,3$, $\delta = 10$, $\mathcal{G} = 10$, $\gamma = 0,2$. Dengan hanya memiliki titik keseimbangan bebas penyakit ($E_0 = 200,0,0$) sesuai dengan persamaan (6), didapatkan hasilnya $R_0 = 2,4853 > 1$. Hasil yang diperoleh ini jika dibandingkan dengan hasil sebelumnya didapatkan bahwa $R_0 < 1$, dan berdasarkan persamaan (6), diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 adalah tidak stabil asimtotik local jika $R_0 < 1$. Dimana jika dibandingkan dengan hasil analisis sebelumnya seharusnya berdasarkan persamaan 8, bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) adalah stabil asimtotik local untuk setiap saat time delay infected $\tau \geq 0$. Untuk menghitung $R_0 < 1$, diberikan : $b = 40$, $d = 0,2$, $\beta_1 = 0,25$, $\beta_2 = 0,04$, $m = 0,3$, $\delta = 10$, $\mathcal{G} = 10$,

$\gamma = 0,2$. Dengan hanya memiliki titik keseimbangan bebas penyakit ($E_0 = 200,0,0$) sesuai dengan persamaan 7, didapatkan hasilnya $R_0 = 2,4853 > 1$. Hasil yang diperoleh ini jika dibandingkan dengan hasil analisis sebelumnya sangat bertolak belakang dimana hasil sebelumnya didapatkan bahwa $R_0 > 1$.

Kesimpulan Dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam penelitian ini menunjukkan bahwa kesetimbangan bebas penyakit stabil global untuk semua $\tau > 1$, ketika bilangan reproduksi dasar $R_0 < 1$. Dapat disimpulkan, time delay pada periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) tidak dapat memengaruhi kestabilan kesetimbangan bebas penyakit. Dengan kata lain pengaruh time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit) dapat diabaikan untuk $R_0 < 1$. Namun ketika $R_0 > 1$ kestabilan kesetimbangan endemic akan dipengaruhi oleh time delay periode pada *infected* (terinfeksi penyakit). Saran peneliti membuka dan memberikan peneliti lainnya yang tertarik dengan model sirs ini untuk selanjutnya meneliti kembali dengan menambah variabel parameter dan nilai pada parameternya.

Daftar Pustaka

- Boyce, W. E dan Diprima, R. C. (2001). *Elementary Diffrensial Equation and Boundary Problems*, Seventh edition,
- Enatsu, Y. and Messina, E. (2012). Global Dynamics of a Delayed SIRS Epidemic Model with Class of Non Linear Incidence Rates. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 218, No 9, 5327--5336.
- Hethcote, H. W. (2000). *Mathematics of Infectious Diseases*, SIAM, Vol. 42, 599--653.
- Huitao, Zhou. and Yiping, Lin. (2013). An SIRS Epidemic Model Incorporating Media Coverage with Time Delay. *Discreate Dynamics in Nature and Society*,

Volume 2013, Hindawi publishing Corporation.

Sinuhaji, F. (2015). Model Epidemii SIRS Dengan Time Delay. Jurnal Visipena, Vol 6, No 1.

Sinuhaji, F. (2018). Model Epidemii SIRS dengan Time Delay Periode Kesembuhan. Jurnal Curere, Vol 2, No 2.