MODEL EPIDEMI SIRS DENGAN TIME DELAY PADA PERIODE KESEMBUHAN

Ferdinand Sinuhaji
Dosen Matematika Universitas Quality Berastagi
Email : sinuhajiferdinand@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan mengindentifikasi apakah Time delay periode kesembuhan mempegaruhi atau tidak mempengaruhi stabilitas pada kesetimbangan bebas penyakit dan pada kesetimbangan endemic penyakit. Time delay dalam pengertian pada penelitian ini adalah waktu periode kesembuhan. Time delay pada penelitian ini di fokuskan pada model spesifik tunggal, dengan menghitung keadaan sementara dan keadaan permanen dari penyebaran penyakit.

Model SIRS yang digunakan pada penelitian ini dengan asumsi bahwa semua individu yang telah sembuh tidak mempunyai kekebalan yang permanen terhadap penyakit, sehingga akan kembali masuk ke dalam kelas rentan penyakit model epidemi SIRS ini membagi populasi menjadi empat subpopulasi yaitu *Susceptible, Infective, Recovered dan Susceptible*.

Penelitian ini dilakukan dengan merevisi kompartemen model epidemi SIRS yang selanjutnya digunakan untuk menentukan persamaan pembangunan model yang direpresentasikan dalam sistem persamaan differensial. Sistem tersebut menggambarkan interaksi antara subpopulasi dengan populasi lainnya.

Hasil penelitian diketahui bahwa kesetimbangan bebas penyakit stabil global untuk semua $\tau > 0$ ketika jumlah bilangan $R_0 < 1$. Dapat dikatakan, time delay periode kesembuhan tidak dapat mempengaruhi kestabilan kesetimbangan bebas penyakit. Dengan kata lain, pengaruh time delay periode kesembuhan dapat diabaikan untuk $R_0 < 1$. Namun, ketika, $R_0 > 1$ kestabilan kesetimbangan endemi akan dipengaruhi oleh time delay periode kesembuhan.

Kata kunci: **sirs, model epidemi sirs, time delay periode kesembuhan.**

Abstract

This study aims to identify whether the healing time delay period affects or does not affect the stability of disease-free equilibrium and the equilibrium of disease endemic. Time delay in the sense of this study is the time period of recovery. Time delay in this study is focused on a single specific model, by calculating the temporary and permanent state of the spread of the disease.

The SIRS model used in this study with the assumption that all individuals who have recovered do not have permanent immunity to the disease, so they will return to the disease-prone class. The SIRS epidemic model divides the population into four subpopulations namely Susceptible, Infective, Recovered and Susceptible.

This research was conducted by revising the SIRS epidemic model compartment which was then used to determine the model development equations

represented in differential equation systems. The system describes the interaction between subpopulations with other populations.
The results show that global disease-free equilibrium is stable for all $\tau > 0$ when the number of numbers is $R_0<1$. It can be said that the time delay of the recovery period cannot affect the stability of disease-free equilibrium. In other words, the effect of the time delay recovery period can be negligible for $R_0 <1$. However, when, $R_0 > 1$ the stability of endemic equilibrium will be affected by the time delay of the recovery period.
Keywords: sirs, sirs epidemic model, time delay recovery period.

Pendahuluan

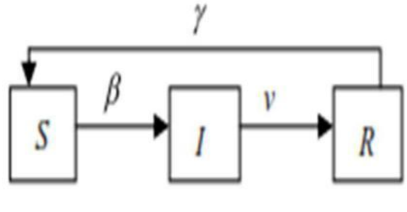
Dalam kehidupan makhluk hidup ini banyak permasalahan yang muncul diantaranya banyak penyakit menular yang mengancam kehidupan. Sangat diperlukan sistem untuk mengontrol dan mengetahui penyebaran penyakit menular tersebut salah satunya adalah model matematika yang dapat membantu dan mempermudah penyelesaaian masalah tersebut. Menyelesaikan masalah juga tidak mudah untuk menurunkan model matematisnya terutama untuk masalah yang cukup kompleks.

Meskipun model matematisnya sudah diperoleh namun masalah waktu dan biaya biasanya juga menjadi kendala apabila menggunakan model matematis tersebut. Model epidemi merupakan sistem persamaan diferensial dirumuskan sebagai *masalah nilai awal atau Initial Value Problems (IVPs)*. Sehingga model diintegrasikan terhadap waktu, yang dimulai dengan awal yang ditetapkan untuk kelas-kelas populasi yang berbeda.

Epidemi merupakan suatu keadaan berjangkitnya suatu penyakit menular dalam populasi pada suatu tempat yang melebihi perkiraan yang normal dalam periode yang singkat. Bila penyakit tersebut selalu terdapat dalam suatu tempat begitupun dengan faktor penyebabnya maka dikatakan *endemik*, kemudian bila penyakit tersebut mempunyai ruang lingkup penyebaran yang sangat luas maka disebut *pandemik*.

Model epidemik pertama kali menjelaskan masalah penyebaran penyakit adalah model SIR klasik yang dikemukakan oleh (Kermack dan McKendrick, 1927). Model ini terdiri atas tiga kompartemen yaitu S (*susceptible*), I (*infective*), R (*recovered*). Sejak (Kermack dan McKendrick, 1927) mengusulkan SIR klasik, pemodelan matematika telah menjadi alat penting dalam menganalisis penyebaran dan pengendalian infeksi penyakit. Upaya telah dilakukan untuk mengembangkan realistis model matematika untuk transmisi infeksi penyakit.

Secara grafik dapat ditunjukan model teori epidemik (Anderson dan May, 1991), sebagai latar belakang dari penelitian ini. Model teori epidemi untuk penyakit diilustrasikan pada gambar dibawah ini



Gambar 1. Model epidemi sirs

Model epidemic sirs menggambarkan bahwa individu yang terinfeksi penyakit *(Invected)*, kemudian sembuh *(Recovered)*, setelah sembuh, individu memperoleh kekebalan sementara terhadap penyakit tersebut. Seiring berjalan waktu kekebalan tersebut menghilang atau berkurang, mengakibatkan individu yang rentan terserang penyakit tersebut dapat kembali terinfeksi penyakit yang sama. Sistem persamaan diferensialnya menjadi :

$$\frac{ds}{dt} = -\beta SI + \gamma R, \qquad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - VI, \qquad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = VI - \gamma R \qquad (3)$$

Rumusan masalah pada penelitian ini membahas bagaimana menurunkan model matematisnya untuk epidemi SIRS dengan time delay periode kesembuhan sehingga menghasilkan model epidemi, dari model epidemi tersebut akan terbentuk suatu sistem persamaan diferensial.

Dari persamaan diferensial yang sudah terbentuk tadi dapat dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan epidemi kemudian

menganalisis kestabilannya.

Kemudian mengindentifikasi apakah time delay periode kesembuhan tersebut mempengaruhi atau tidak mempengaruhi stabilitas pada kesetimbangan bebas penyakit dan pada kesetimbangan endemi penyakit dengan memodifikasi pada dinamika transmisinya.

Tujuan penelitian ini adalah mengindentifikasi apakah time delay periode kesembuhan mempengaruhi atau tidak mempengaruhi stabilitas pada kesetimbangan bebas penyakit dan pada kesetimbangan endemic penyakit.

Tinjauan Pustaka

A. Sistem persamaan diferensial Autonomous

(Boyce dan Diprima ((2001) Misalkan suatu persamaan diferensial *autonomous* dinyatakan sebagai berikut

$$m = Y(x) \qquad (4)$$

Dengan *Y* adalah fungsi kontinu bernilai real dari *x* dan mempunyai turunan parsial kontinu. Pada persamaan (4) disebut persamaan diferensial *autonomous* karena tidak mendatangkan *t* di dalam. Apabila (4) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{21n}x_n, \\ &. \\ &. \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n, \end{aligned}$$

B. Sistem persamaan difrensial

(Waluya (2006) Persamaan

diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih yang menghubungkan fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Selain itu persamaan diferensial juga didefinisikan sebagai persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan fungsi yang tidak diketahui Jenis-jenis persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua jenis yaitu persamaan diferensial biasa dan diferensial parsial. Sedangkan persamaan diferensial dilihat dari bentuk fungsi atau pangkatnya juga dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial nonlinear.

Persamaan diferensial linear adalah jika memenuhi dua hal yaitu pada variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi berpangkat satu dan tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya atau turunan yang satu dengan turunan lainnya atau variabel terikat dengan sebuah turunan.

Persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan diferensial yang bukan merupakan persamaan diferensial linear. Pada istilah dengan linear berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, peubah-peubah $y,y^1,...,y^m$ berderajat satu atau nol Bentuk umum dari persamaan diferensial linear orde-n

adalah : $a_{n-1}(x)y^{n-1} + a_1(x)y^1 + a_0(x)y = f(x)$

Pada persamaan diferensial $F(x,y^1,...,y^m) = 0$ adalah merupakan persamaan diferensial nonlinear, jika salah satu dari berikut di penuhi F : F tidak berbentuk polinom, dalam $y,y^1,...,y^m$ dan F tidak berbentuk polinom berpangkat lebih dari dua dalam $y,y^1,...,y^m$. (Waluya, 2006).

C. Titik kesetimbangan dan kestabilan

(Haberman (1987)) Dengan menggunakan titik kesetimbangan maka suatu sistem dapat lebih memudahkan untuk mengamati perilaku kestabilannya. Berikut ini adalah definisi titik kesetimbangan.

Definisi 1

Titik kesetimbangan adalah sebuah keadaan dari suatu sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Jika sistem dinamika dituangkan dalam bentuk persamaan diferensial maka titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama yang sama dengan nol. Suatu titik $m\hat{}\ \varepsilon\ R$ disebut titik kesetimbangan dari system persamaan m = F (x), ε jika memenuhi persamaan f (m*) = 0, Dalam sistem epidemologi dikenal titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah dimana sudah tidak ada lagi penyakit yang menyerang dalam populasi sedangkan titik kesetimbangan endemik adalah dimana penyakit selalu menetap dalam populasi. Berikut ini adalah definisi kestabilan titik kesetimbangan menurut (Guckenheimer dan Holmes (1983)).

Definisi 2

1. Kestabilan titik kesetimbangan dari sistem $m = Fx$ dan m^0 adalah titik asal.
2. Kestabilan disebut stabil asimtotik, jika m^* stabil dan terdapat $b > 0$

3. Kestabilan disebut tidak stabil, jika terdapat suatu = 0 sedemikian sehingga untuk sebarang terdapat sebuah $\lambda = 0$ m^0. Jika kondisi awal berada sangat dekat dengan kestabilan dan solusi

sistem cenderung mendekati titik kesetimbangan kestabilan, maka sistem disebut stabil asimtotik. Jika sifat solusi menjauh dari titik kesetimbangan kestabilan akibat perubahan kecil pada kondisi awal maka sistem disebut tidak stabil.

Teorema 1 (Finizio dan Ladas (1982)) Jika matriks *A* pada sistem persamaan (1) adalah matriks koefisien dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, maka titik kesetimbangan m* disebut :

1. Stabil, jika (λ_1) ≤ 0 , ∀ *i* = 1, 2 ,3 ..., *n*
2. Stabil asimtotik, (λ_1) < 0 , ∀ *i* = 1, 2 ,3 ..., *n*
3. Tidak stabil, (λ_s) > 0 , untuk suatu *s*

Pada teorema (1) dapat dipergunakan untuk menentukan kestabilan lokal suatu titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan yang stabil atau stabil asimtotik hanya pada suatu daerah tertentu dalam lingkup solusi sistem dikatakan stabil lokal atau stabil asimtotik. Titik kesetimbangan dikatakan stabil global atau stabil asimtotik global jika titik kesetimbangan tersebut atau stabil asimtotik pada setiap lingkup solusi sistem.

D. Nilai eigen dan vektor eigen

Dalam hal ini, penulis menganggap bahwa $R_0 > 1$ .Dengan menggunakan time delay sebagai bifurkasi sebagai parameternya. (Anton (1998)) Jika *A* adalah matriks *n x n*, maka vektor taknol *x* didalam R^n dinamakan vektor eigen dari *A* jika *Ax* adalah kelipatan skalar dari *x* yaitu, Ax = δx (5), supaya λ

menjadi nilai eigen, maka harus ada penyelesaian taknol dari persamaan ini. Sehingga akan mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika *det(* ($\lambda I - A$) = 0 (6). Persamaan (5) dinamakan persamaan karakteristik *A*, Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari *A*. Bila diperluas, maka determinan *det*($\lambda I - A$) adalah polinom

λ yang dinamakan polinom karakteristik dari *A*.

E. Bilangan reproduksi dasar (R_0)

(Hethcote (2000)) Untuk mengetahui tingkat penyebaran pada suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan dalam masalah penyebaran penyakit adalah bilangan reproduksi dasar. Kemungkinan terjadinya infeksi pada suatu populasi tergantung pada bilangan reproduksi. Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah potensi penularan penyakit pada populasi rentan merupakan rata-rata jumlah individu yang terinfeksi secara langsung oleh seseorang penderita selama masa penularanya bila termasuk dalam populasi yang seluruhnya masih rentan. (Liu (2013)) (R_0) adalah nilai yang menunjukkan apakah penyebaran penyakit menjadi epidemi atau tidak epidemi pada suatu populasi.

$$R_o = \frac{b\beta_1}{d(d + \vartheta + \delta)} \qquad (7)$$

Bilangan reproduksi dasar merupakan parameter yang penting dalam matematika epidemilogi yang merupakan ambang batas *(threshold)* terjadinya penyebaran penyakit. Bilangan ini diperoleh dengan cara menetukan nilai eigen matriks jacobian pada titik keseimbangan bebas penyakit *(disease free equilibrium)* dan titik keseimbangan endemik *(endemi equilibrium)*.

F. Model Epidemi

(Lowe dan Kostrzewski (1973)) Ilmu yang membahas mengenai penyebaran penyakit disebut epidemiologi. Epidemiologi adalah studi tentang faktor yang menentukan frekuensi dan distribusi penyakit pada populasi manusia.

Epidemi adalah penyakit yang timbul sebagai kasus baru pada suatu populasi tertentu, dengan laju yang melampaui perkiraan. Suatu infeksi dikatakan sebagai endemik pada suatu populasi jika infeksi tersebut berlangsung di dalam populasi tersebut tanpa adanya pengaruh dari luar. Suatu infeksi penyakit dikatakan sebagai endemik bila setiap orang yang terinfeksi penyakit tersebut menularkannya kepada tepat satu orang lain.

(Kermack dan McKendrick 1927)) Model epidemi adalah merupakan suatu model matematika yang dapat digunakan untuk melihat laju penyebaran penyakit. Kondisi epidemi terjadi ketika ada salah satu individu rentan pada populasi tersebut, maka populasi tersebut memiliki peluang menjadi populasi rentan, dan kemungkinan besar infeksi tersebut akan mewabah pada populasi tersebut. Sehingga pada akhirnya seluruh individu dalam populasi berpeluang terinfeksi. Pada dasarnya model epidemi pada penyakit memiliki tiga kompartemen, yaitu (*Susceptible, Invected, Recovered*) yang didefinisikan :

1. *Susceptible*, yaitu individu yang sehat dapat terinfeksi.
2. *Invected*, yaitu individu yang terinfeksi memungkinkan untuk menularkan penyakit.
3. *Recovered*, yaitu seseorang yang memiliki kekebalan karena telah terinfeksi, dan dapat sembuh. Sehingga, model epidemik suatu penyakit dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\frac{dS}{dt} = a(S, I, R).$$
$$\frac{dI}{dt} = b(S, I, R), \qquad (8)$$
$$\frac{dR}{dt} = c(S, I, R)$$

G. Memodifikasi dinamika transmisi

(Huitao et al (2013)) dalam penelitiannya pada media coverage memodifikasi dinamika transmisi menjadi seperti berikut :

$$g(I(t-\tau)) = \beta_1 - \frac{\beta_2 I(t-\tau)}{m + I(t-\tau)}, \quad (9)$$

Dimana $\tau > 0$ adalah time delay yang mewakili periode laten media pada coverage. Penulis memodifikasi dinamika tranmisi menjadi seperti berikut, secara umum model epidemic SIRS dapat dirumuskan menjadi :

$$\frac{dS}{dt} = b - dS - g(I)S + \gamma R,$$
$$\frac{dI}{dt} = g(I)S - (d + \vartheta + \delta)I. \quad (10)$$
$$\frac{dR}{dt} = \vartheta I - (d + \gamma)R,$$

Kemudian model (10), menjadi seperti berikut ini (11):

$$\frac{dS}{dt} = b - dS - \left\{ \beta_1 - \frac{I}{\beta_2 + mI} \right\} SI + \gamma R,$$

$$\frac{dI}{dt} = \left\{ \beta_1 - \frac{I}{\beta_2 + mI} \right\} SI - (d + \vartheta + \delta) I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \vartheta I - (d + \gamma) R,$$

Sehingga dinamika transisi pada penularan penyakit dapat dimodifikasi sebagai berikut ini :

$$g(I(t-\tau)) = \beta_1 - \frac{I(t-\tau)}{\beta_2 + mI(t-\tau)} \quad (12)$$

di mana penulis mendefinisikan $\tau > 0$ adalah time delay periode kesembuhan yang diartikan sebagai waktu periode kesembuhan dari individu *invected* sampai menjadi individu *recovered*.

H. Titik kesetimbangan bebas Penyakit (E_0)

Titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium)* adalah suatu keadaan dimana tidak terjadi penyebaran penyakit dalam populasi. Pertama terlebih menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit, misalkan titik tersebut dituliskan $E_0 = (S_0, I_0, R_0)$. Karena populasi bebas dari penyakit maka $I_0 = 0$, yaitu suatu keadaan dimana titik terjadi infeksi pada populasi. Untuk mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dimana $\tau = 0$. **Teorema 1,** untuk setiap time delay periode kesembuhan $\tau \geq 0$, penulis mempergunakan : 1. Titik kesetimbangan bebas penyakit *(E_0)* adalah stabil asimtotik local jika $R_0 < 1$.

2. Titik kesetimbangan bebas penyakit *(E_0)* adalah tidak stabil jika $R_0 > 1$.

I. Titik kesetimbangan epidemic (*E)**

Titik kesetimbangan epidemi *(endemic equilibrium)* adalah dimana didalam kondisi populasi terjadi penyebaran penyakit yang hasilkan dari nilai *(R_0)* yang didapatkan dari nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.Jika semua individu rentan maka $S = (S^0) = \frac{b}{d}$, dan karena rentang waktu hidup manusia yang terinfeksi adalah $\frac{1}{d(d+\vartheta+\delta}$, bearti

$$R_0 = \frac{b\beta_1}{d(d+\vartheta+\delta)}$$

Hasil dan pembahasan

A. Hasil Penelitian

Penurunan model epidemi SIRS dengan time delay periode kesembuhan adalah sebagai berikut :

1. Laju perubahan populasi *Susceptible* per satuan waktu dipengaruhi oleh laju pertambahan rekruitmen pada populasi manusia *(b)*. Populasi *Susceptible* sepanjang waktu *(t)* akan berkurang akibat laju kematian alami pada *Susceptible (dS)(t)* dan dipengaruhi kekuatan penyebaran infeksi pada *Susceptible* β_1 dan akan berkurang akibat adanya I/β_2+ *mI* dengan dipengaruhi time delay periode kesembuhan dan kekuatan penyebaran infeksi dipengaruhi pada *recorvered*

γ dan berpengaruh laju antara individu yang terjangkit penyakit menjadi individu terinfeksi kemudian individu yang telah sembuh maka dapat ditulis :

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - dS(t) - \left\{ \beta_1 - \frac{I(t-\tau}{\beta_2 + mI(t-\tau} \right\}$$

2. Laju perubahan populasi *Invected* per satuan waktu dipengaruhi oleh

pertambahan populasi invected sepanjang waktu *(t)* akibat kekuatan penyebaran infeksi pada susceptible β_1

Dan akan berkurang akibat adanya I/β_2 + *mI* dengan dipengaruhi time delay periode kesembuhan betambahnya populasi *Invected* per satuan waktu dipengaruhi faktor laju kematian alami, laju kesembuhan tiap individu yang sakit menjadi individu rentan, laju kematian tiap individu yang disebabkan oleh penyakit pada populasi yang terinfeksi penyakit *invected* $d + \vartheta + \delta)I(t)$ dan laju perubahan yang rentan menjadi terinfeksi pada popolasi

Invected, maka dapat ditulis :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \left\{ \beta_1 - \frac{I(t-\tau)}{\beta_2 + mI(t-\tau)} \right\} S(t)I(t)$$

2. Laju perubahan populasi *Recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh pertambahan populasi *Recovered* per satuan waktu merupakan akibat laju perubahan status dari terinfeksi penyakit terhadap populasi *Invected* $(\vartheta I)(t)$ dan berpegaruh antara individu yang terjangkit penyakit menjadi individu terinfeksi kemudian individu yang telah sembuh.

Selain itu, berkurangnya populasi *Recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh laju kematian alami tiap individu *d* pada populasi *Recovered* dan laju kehilangan kekebalan tiap individu terhadap penyakit dan akan kembali menjadi individu rentan penyakit γ, maka dapat ditulis

$$\frac{dR(t)}{dt} = \vartheta I(t) - d + \gamma)R(t)$$

Pembahasan

Contoh model matematika epidemi Sirs dengan time delay periode kesembuhan

Contoh pertama dan contoh kedua membahas sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay periode kesembuhan dengan memperhatikan kestabilan titik kesetimbanganya. Contoh ini bertujuan memberikan gambaran mengenai sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay periode kesembuhan dengan memberikan dan memperhatikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi nilai bilangan reproduksi dasar R_0 dalam teorema-teorema yang telah diberikan.

Dalam penelitian ini dianalisis kesetimbangan dan kestabilan untuk dua kondisi, yaitu ketika $R_0 < 1$ pada saat $\tau > 0$, dimana kesetimbangan bebas penyakit stabil karena time delay periode kesembuhan tidak dapat mempengaruhi kestabilan kesetimbangan bebas penyakit dan ketika $R_0 > 1$, kestabilan kesetimbangan endemi akan dipengaruhi oleh time delay periode kesembuhan. Pada contoh ketiga akan membahas model SIRS dengan tanpa time delay periode kesembuhan. Contoh ini bertujuan untuk memperbandingkan model SIRS dengan time delay periode kesembuhan dan tanpa time delay periode kesembuhan.

Contoh 1 Jika $R_0 < 1$

Perilaku sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay periode kesembuhan diperlihatkan dengan pertama kali menentukan nilai parameternya. Nilai-nilai parameter adalah sebagai berikut dimana nilai b = 30, d = 0,07, β_1 = 0,0009, β_2 = 0,00027, m = 60, $\delta = 0{,}5$, $\vartheta = 0{,}07$, $\gamma = 0.07$

Dengan $b/d = 986$, sesuai dengan (7) penulis menghitung R_0 = 0,8896 < 1 selain itu penulis mendapatkan bebas penyakit E_0 = (986,0,0) Dari teorema

,diketahui diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 adalah stabil asimtotik lokal untuk setiap saat time delay periode kesembuhan $\tau \geq 0$.

Contoh 2 Jika $R_0 > 1$

Perilaku sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay periode kesembuhan diperlihatkan dengan pertama kali menentukan nilai parameternya. Nilai-nilai parameter adalah sebagai berikut : b = 30, d = 0,07, β_1 = 0,0009, β_2 = 0,00027, m = 60, $\delta = 0{,}5$, $\vartheta = 0{,}07$, $\gamma = 0.07$ Dengan $b/d = 986$, sesuai dengan (7) penulis menghitung R_0 = 0,8896 > 1 selain itu penulis mendapatkan bebas penyakit E_0 = (986,0,0) dan titik kesetimbangan E_0

= (368.1359, 64.7522, 85.6021). Dengan demikian dari teorema (1) diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) adalah tidak stabil asimtotik lokal untuk setiap saat time delay periode kesembuhan $\tau \geq 0$ dan titik kesetimbangan E^* adalah stabil untuk $\tau \in [0{,}91.06947)$.

Contoh 3 model Sirs tanpa time delay periode kesembuhan

Salah satu perbedaan dengan time delay periode kesembuhan dan tanpa time delay periode kesembuhan terletak pada metode yang akan digunakan untuk menganalisis model dengan time delay periode kesembuhan dengan tanpa time delay periode kesembuhan. Menganalisis untuk model dengan time delay periode kesembuhan biasanya lebih kompleks dan masih jarang metode yang telah ditemukan.

Diberikan nilai parameter pada contoh ketiga : b = 30, d = 0,07, $g = 0{,}0008, \delta = 1, \vartheta = 0{,}1, \gamma = 0{,}4$ dengan $b/d = 986$ didapatkan hasilnya

$R_0 = 0{,}8656 < 1$ dan $R_0 = 8{,}9876 > 1$. Jika $R_0 > 1$ titik kesetimbangan E^*=(202.7654.68.9097,90.5677).
Sekarang akan diperbandingkan dengan model dengan time delay periode kesembuhan. Setelah dihitung nilai R_0 < 1 dan hasil R_0 > 1 hasilnya adalah sama dengan time delay periode kesembuhan. Kemudian diketahui jika R_0 < 1 pada titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) tanpa time delay periode kesembuhan juga sama yaitu adalah stabil asimtotik dapat dikatakan bahwa pengaruh time delay periode kesembuhan tidak mempengaruhi. Ketika, $R_0 > 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan titik kestabilan kesetimbangan endemic akan dipengaruhi oleh time delay periode kesembuhan.

Kesimpulan Dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam penelitian ini menunjukan bahwa kesetimbangan bebas penyakit stabil global untuk semua $\tau > 1$, ketika bilangan reproduksi dasar R_0 < 1. Dapat di simpulkan, time delay pada periode kesembuhan tidak dapat mem pengaruhi kestabilan kesetimbangan bebas penyakit. Dengan kata lain pengaruh time delay periode kesembuhan dapat diabaikan untuk $R_0 < 1$. Namun ketika $R_0 > 1$ kestabilan kesetimbangan endemic akan dipengaruhi oleh time delay periode kesembuhan. Saran peneliti membuka dan memberikan peneliti lainnya yang tertarik dengan model sirs ini untuk selanjutnya meneliti kembali dengan menambah variabel parameter dan nilai pada parameternya.

Daftar Pustaka

Boyce, W. E dan Diprima, R. C. (2001). *Elementary Diffrensial Equation and Boundary Problems*, Seventh edition,

Enatsu, Y. and Messina, E. (2012). Global Dynamics of a Delayed SIRS Epidemic Model with Class of Non Linear Incidence Rates. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 218, No 9, 5327--5336.

Hethcote, H. W. (2000). *Mathematics of Infectious Diseases*, SIAM, Vol. 42, 599--653.

Huitao, Zhou. and Yiping, Lin. (2013). An SIRS Epidemic Model Incorporating Media Coverage with Time Delay. *Discreate Dynamics in Nature and Society*, Volume 2013, Hindawi publishing Corporation.