BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A.Diferensial

Misalkan fungsi *f* didefinisikan oleh persamaan:

y =f(x)

jika *f'(x)* ada, maka:

$$f'(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dengan $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Definisi 1.

Jika fungsi *f* didefinisikan oleh *y =f(x)*, maka diferensial dari x, yang dinyatakan oleh *dx*, diberikan oleh

$$dx = \Delta x$$

dengan Δx adalah pertambahan sebarang dari x, dan x merupakan bilangan sebarang di dalam daerah asal *f'*. (Leithold, 1992:263)

Definisi 2.

Jika fungsi *f* didefinisikan oleh *y=f(x)*, maka diferensial dari y, dinyatakan oleh dy, diberikan oleh

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Dengan x dalam daerah asal *f'* dan Δx adalah pertambahan sebarang dari x,

Dari definisi 1 dan 2, diperoleh:

$$dy = f'(x)dx \qquad (2.1)$$

Dengan membagi kedua ruas pada persamaan (2.1) oleh dx, maka diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = f'x \quad jika\ dx \neq 0 \qquad (2.2)$$

Persamaan (2.2) mengungkapkan bahwa turunan merupakan hasil bagi dua diferensial (Leithold, 1992: 262-263).

Dari defenisi diferensial diatas, maka inti dari diferensial adalah pertambahan suatu nilai, misal x. Atau dapat dikatakan bahwa diferensial merupakan *perubahan suatu nilai yang tergantung pada nilai yang lain*. Secara lebih khusus, inti dari definisi tersebut dapat diilustrasikan dengan perubahan lebih khusus.

B. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah-masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial.

Secara umum, persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984: 3). Persamaan diferensial yang memuat suatu variabel tak bebas *y* dan variabel bebas *x* biasa dinotasikan dengan:

$y' = \frac{dy}{dx}$ atau $x' = \frac{dy}{dx}$

Berikut contoh persamaan diferensial:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + xy(\frac{dy}{dx})^2 = 0$
2. $\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$
3. $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$
4. $\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{dy^2} + \frac{\partial^2 u}{dz^2} = 0$
5. $\frac{dy}{dx} = x + 5$ (Ayres, 1981:1)

Secara umum persamaan diferensial yang melibatkan variabel-variabel ini dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(Piskunov, 1974:14)}$$

dengan $y^{(n)}$ merupakan turunan ke-n dari *y* terhadap *x*.

Penyelesaian persamaan diferensial adalah fungsi yang turunannya termuat dalam persamaan tersebut. Jika fungsi tersebut di substitusikan ke dalam persamaan dferensial akan menghasilkan suatu identitas. Persamaan diferensial memiliki dua macam penyelesaian, yaitu penyelesaian umum dan penyelesaian khusus.

Penyelesaian umum adalah penyelesaian yang masih memuat konstanta, sedangkan penyelesaian khusus adalah penyelesaian yang sudah tidak memuat konstanta. Penyelesaian khusus ditentukan dengan bantaun syarat bantu, yaitu syarat awal (nilai awal) atau syarat batas. Persamaan diferensial disajikan beserta syarat awalnya seperti berikut:

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$$

disebut masalah nilai awal. Penyelesaian masalah nilai awal adalah penyelesaian dari permasalahan diferensial yang memenuhi syarat awal yang diberikan. Jika permasalahan tersebut dapat diselesaikan secara analitik, maka penyelesaian yang dihasilkan disebut penyelesaian sejati (penyelesaian yang sesungguhnya).

Istilah-istilah dalam persamaan diferensial yaitu

1. Orde (tingkat) persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi turunan yang muncul pada persamaan diferensial tersebut.
2. Degree (derajat) persamaan diferensial adalah bentuk polynomial (suku banyak) yang terdapat pada turunan tingkat tertinggi dan muncul pada persamaan diferesial tersebut.

   Contoh:

   a. $\frac{dy}{dt} = 2t + 6$ berorde 1, berderajat 1

   b. $(\frac{dy}{dt})^4 - 5t^5 = 0$ berorde 1, berderajat 4

   c. $\frac{d^2y}{dt^2} - 4(\frac{dy}{dt})^3 + 19y = 0$ berorde 2, berderajat 1

   d. $(\frac{d^2y}{dt^2})^3 - 5(\frac{dy}{dt})^7 = 0$ berorde 2, berderajat 3

C. Jenis-Jenis Persamaan Diferensial

1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas (Ross, 1984: 4). Persamaan diferensial biasa juga sering disingkat menjadi PDB.

Contoh:

a. $\frac{d^2y}{dx^2} + xy(\frac{dy}{dx})^2$

b. $\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$

Berdasarkan turunan tertinggi yang terdapat di dalam persamaannya, PDB dapat dikelompokkan lagi menurut ordenya, yaitu:

1. PDB orde 1, yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan pertama.
   Contoh:
   $x\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$
2. PDB orde 2, yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan kedua.
   Contoh:
   $xy\frac{d^2y}{dx^2} - y^2 sin\ x = 0$
3. PDB orde 3, yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan ketiga .
   Contoh:
   $\frac{d^3y}{dx^3} - y\frac{dy}{dx} + 3^{4x} = 0$
4. Dan seterusnya untuk PDB dengan orde yang lebih tinggi. PDB orde ke 2 keatas dinamakan juga PDB orde lanjut.

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) terbagi dalam 2 jenis solusi, yaitu:

1. Solusi Umum (Penyelesaian Umum): solusi yang masih mengandung konstanta sebarang misalnya c.
2. Solusi Khusus/Partikular (Penyelesaian KhususPartikular): solusi yang tidak mengandung konstata variabel karena terdapat syarat awal pada suatu PDB.

2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh :

a. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xye^{x+y}$ (yang dalam hal ini $u=g(x,y)$)

b. $\frac{\partial u}{\partial t} = 3\sin(x+t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (yang dalam hal ini,$u=g(x,y)$)

Peubah bebas contoh (a) adalah x dan y, sedangkan peubah terikat adalah u, yang merupakan fungsi dari x dan y, atau ditulis sebagai u = g(x,y). Sedangkan peubah bebas untuk contoh (b) adalah x, y, dan t, sedangkan peubah terikatnya adalah u, yang merupakan fungsi dari x,y, dan t, atau ditulis sebagai u = g(x, y, t).

3. Persamaan Diferensial Linier

Persamaan diferensial linier adalah suatu persamaan diferensial yang hanya melibatkan satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi tak tentu *y* terhadap *x* dan mungkin fungsi *y* sendiri, fungsi tertentu dari *x*, dan konstanta-konstanta.

Jika sebuah persamaan hanya mengandung turunan biasa dari satu atau beberapa variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas, maka persamaan diferensial yang bersangkutan dinamakan Persamaan Diferensial Biasa (*Ordinary Differential Equations*).

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \qquad (2.3)$$

dengan $a_0 \neq 0$ (Ross, 1984: 5)

Contoh 3

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \qquad (2.4)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + x^2\frac{d^3 y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = xe^x \qquad (2.5)$$

Secara lebih sederhana, persamaan diferensial biasa linier orde pertama dapat ditulis sebagai:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.6}$$

Jika $Q(x)=0$, maka persamaan tersebut dikatakan persamaan diferensial linier homogen. Sebaliknya, jika $Q(x)\neq 0$ dikatakan persamaan diferensial linier tak homogen. Persamaan diferensial dikatakan linier jika mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

1. Variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi berpangkat satu dan tidak terdapat fungsi trasenden dalam bentuk peubah tak bebas, serta $a_0(x)$ adalah fungsi kontinu.
2. Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan.

   Jadi istilah linier berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, peubah-peubah $y, y', \cdots, y^n$ berderajat satu atau nol.

4. Persamaan Diferensial NonLinier

Persamaan diferensial biasa nonlinier adalah sebuah persamaan diferensial yang tak linier.

Contoh 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dz} + 6y = 0 \tag{2.9}$$

Persamaan (2.7) disebut tak linier, karena variabel terikat y berorde dua yaitu $6y^2$. Persamaan (2.8) disebut tak linier, karena $5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$, turunan pertamanya dalam bentuk pangkat 3. Sedangkan persamaan (2.19) disebut tak linier, karena dalam $5y\frac{dy}{dx}$ terdapat perkalian antara variabel terikat y dengan turunan pertamanya.

Dengan demikian persamaan diferensial $F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)} = 0$ adalah persamaan diferensial non-linier, jika salah satu dari berikut dipenuhi oleh *F*:

1. F tidak berbentuk polinom dalam $y', y'', \cdots, y^{(n)}$.
2. F tidak berbentuk polinom berpangkat lebih dari 2 dalam $y', y'', \cdots, y^{(n)}$.

5. Persamaan Diferensial Homogen

Fungsi *F(x,y)* disebut fungsi homogen bila terdapat ***n € R*** sehingga berlaku:

$$F(kx, ky) = k^n F(x, y)$$

dengan n disebut order dari fungsi homogen.

Bentuk persamaan diferensial homogen:

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

atau (2.10)

$f(x, y) = \frac{-M(x,y)}{-N(x,y)} = t^0 f(x, y)$

Disebut persamaan diferensial homogen orde satu, jika *M* dan *N* adalah fungsi homogen yang berderajat sama, atau f fungsi homogen berderajat nol.

6. Persamaan Diferensial Tak Homogen

Persamaan diferensial tak homogen adalah persamaan diferensial yang mempunyai bentuk:

$$(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0$$

Dengan *a,b,c,p,q,r* adalah konstanta. Untuk menyelesaaikan persamaan diferensial tersebut, maka terlebih dahulu harus perhatikan kemungkinan-kemungkinan yang terjadi, yaitu:

a) Jika $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r} atau\ aq - bp \neq 0$

b) Jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r} atau\ aq - bp = 0$

c) Jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = m$

Persamaan diferensial tak homogen dapat diselesaikan jika telah diubah menjadi persamaan diferensial homogen.

7. Persamaan Diferensial Exact

Persamaan diferensial orde pertama berbentuk:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.11)$$

Disebut persamaan diferensial exact jika ruas kiri merupakan diferensial total, yaitu:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad (2.12)$$

Dari suatu fungsi dua peubah *f(x,y)*. Sehingga dapat ditulis :

$$du=0 \quad (2.13)$$

Jika diintegralkan, maka diperoleh:

u(x,y)=c, *c : konstanta*

dengan membandingkan persamaan (2.11) dan (2.12), terlihat bahwa persamaan (2.11) bersifat pasti (exact) jika ada suatu fimgsi *f(x.y)* yang bersifat

a. $\frac{\partial u}{\partial x} = M$

b. $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ (2.14)

Jika fungsi-fungsi M dan N terdefinisikan dan terdiferensiabel di semua titik pada bidang xy dalam kurva tertutup dan tidak memotong kurva fungsi itu sendiri, maka dari persamaan (2.14) diperoleh:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \; dan \; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad (2.15)$$

Tampak bahwa dua turunan kedua di atas adalah sama, yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \; atau \; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad (2.16)$$

Sehingga :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

merupakan syarat perlu dan syarat cukup agar *Mdx+Ndy=0* merupakan persamaan diferensial exact.

8. Persamaan diferensial Bernouli

Persamaan diferensial Bernouli adalah salah satu bentuk dari persamaan diferensial biasa orde satu yang memiliki bentuk umum:

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = B(x)y^n$$

Dengan A, B merupakan suatu fungsi dari x atau konstanta, dan *n* adalah bilangan real. Persamaan diferensial Bernouli merupakan PDB orde satu yang dapat berbentuk persamaan diferensial linier atau tak linier. Jika $n = 0$ atau $n = 1$, maka persamaan diatas merupakan PD Bernouli linier. Sedanngkan jika, $n \neq 0$ atau $n \neq 1$, maka persamaan di atas merupakan PD Bernouli tak linier.

Pada kasus PD Bernouli linier, persamaan di atas dapat langsung diselesaikan secara analitik dan numeric. Namun pada penyelesaian kasus PD Bernouli tak linier persamaan di atas dilinierisasikan menggunakan transformasi Bernouli agar diperoleh PD Bernouli linier, dengan langkah-langkah linierisasi sebagai berikut :

a. Membagi variable terikat y dengan $y^n; n \neq 0$ atau $n \neq 1$ pada persamaan diatas, sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + A(x)y^{1-n} = B(x)$$

b. Memisalkan y^{1-n} menjadi suatu variable baru, missal variable z sehingga:

$$z = y^{1-n}$$

c. Mencari diferensial dari z terhadap x dari persamaan (b) sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}$$

d. Memsubtitusikan persamaan (a) dan (c) kedalam persamaan (a) sehingga diperoleh PD Bernouli linier sebagai berikut:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)A(x)z = (1-n)B(x)$$ (Ayres, 1981:22)

D.Penyelesaian Persamaan Diferensial

Menurut Intan, dkk (2017:331), metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa(tambah, kurang, kali, bagi). Metode numerik juga disebut sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika degan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena adakalanya persoalan matematika sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga dapat dikatakan bahawa persoalan matematika tersebut tidak mempunyai solusi analitik.

Sehingga sebagai alternatifnya, persoalan matematika tersebut diselesaikan dengan meode numerik. Perbedaan antara metode analitik dan metode numerik adalah metode analitik hanya dapat dugunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilakan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat digunakan unutk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonlinier. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesaian yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih tersebut dinamakan kesalahan (error).

E. Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial

1. Metode Deret Taylor

Metode deret Taylor adalah suatu metode pendekatan yang menggunakan deret taylor sebagai bentuk perbaikan nilai untuk nilai fungsi secara keseluruhan pada penyelesaian persamaan diferensial. Deret Taylor digunakan untuk menghampiri fungsi ke dalam bentuk polinom. Fungsi yang rumit menjadi sederhana dengan deret Taylor.

Diberikan fungsi f dan semua turunannya, $f', f'', f''', \cdots, f^n$ di dalam selang [a,b]. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan x $\in [a, b], f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) kedalam deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0)$$

Misalkan x-x_0=h, maka :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^2}{n!} f^n(x_0) \qquad (2.17)$$

Analisis galat metode deret Taylor:

Galat perlangkah metode deret Taylor setelang pemotongan ke-n:

$$E_t = \frac{h^{(n+1)} f^{(n+1)}}{(n+1)!}(t), \; x_0 < t < x_{r+1}$$

$$=O(h^{n+1})$$

Galat longgokan total metode deret Taylor adalah:

$$E_t = \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$

$$= \frac{b-a}{h} \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$

$$= (b-a)\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}h^n$$

$$= O(h^n)$$

2. Metode Runge Kutta

Penyelesaian Persamaan Diferensial (PD) secara numerik dapat menggunakan berbagai macam metode, mulai dari metode yang sederhana hingga metode yang ketelitiannya lebih tinggi. Metode sederhana yang sering digunakan yaitu metode deret Taylor. Namun pada beberapa masalah, metode tersebut dianggap tidak praktis karena tidak semua fungsi dapat dihitung turunannya dengan mudah, terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit. Dari permasalahan tersebut, maka dibutuhkan alternatif metode numerik lainnyya yang tergolong sederhana untuk menyelesaikan suatu fungsi PD. Metode numerik tersebut salah satunya yaitu metode Runge Kutta.

Metode Runge Kutta adalah alternatif lain dari metode deret taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, namun dengan cara yang sederhana. Metode Runge Kutta mencapai ketelitian suatu pendekatan deret taylor tanpa memerlukan kalkulai turunan yang lebih tinggi. Banyak perubahan terjadi, tetapi semuanya dapat ditampung dalam bentuk umum dari persamaan:

$$y_{i+1} = y_i + \emptyset(x_i, y_i, h)h \tag{2.18}$$

Dengan $\emptyset(x_i, y_i, h)h$ adalah fungsi pertambahan yang menggambarkan kemiringan pada interval. Fungsi pertambahan tersebut ditulis dalam bentuk umum:

$$\emptyset = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n \tag{2.19}$$

Dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah tetapan, dan k adalah

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_1 + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_1 + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_1 + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$$

Semua harga *k* berhubungan secara rekusif. Artinya k_1 muncul dalam persamaan k_2, yang muncul lagi dalam persamaan untuk k_3 dan seterusnya. Rekurensi ini membuat metode Runge Kutta efisien untuk kalkulasi oleh komputer.

Ada beberapa tipe metode Runge Kutta yang tergantung pada nilai *n* yang digunakan. Untuk *n*=1, disebut metode Runge Kutta orde satu atau disebut juga metode Euler, yang diperoleh dari$k_1 = (x_1, y_1)$ dan persamaan (2.19):

$$\emptyset = a_1k_1 = a_1f(x_iy_i)$$

Untuk $a_1 = 1$. Didalam metode Runge Kutta, setelah nilai *n* ditetapkan, kemudian nilai a, p, q dicari dengan menyamakan persamaan diatas dengan suku-suku dari deret Taylor. Untuk selanjutnya, bisa ditentukan metode Runge Kutta pada orde selanjutnya.

Metode Runge Kutta orde dua adalah:

$$y_{i+1} = y_1 + (a_1k_1 + a_2k_2)h \tag{2.20}$$

dengan

$$k_1 = f(x_iy_1)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h\,, y_i + q_{11}k_1h) \tag{2.21}$$

Metode Runge Kutta orde tiga adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \tag{2.22}$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \tag{2.23}$$

$$k_3 = f(x_i + h\,, y_i - k_1h + 2k_2h)$$

Metode Runge Kutta empat adalah :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{2.24}$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h\,, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \tag{2.25}$$
$$k_4 = f(x_i + h\,, y_i + k_3h)$$

Analisis galat metode Runge-Kutta:

1. Galat metode Runge-Kutta orde satu:
   a. Galat per-langkah : $O(h^2)$
   b. Galat longgokan : $O(h)$
2. Galat metode Runge-Kutta orde dua:
   a. Galat per-langkah : $O(h^3)$
   b. Galat longgokan : $O(h^2)$
3. Galat metode Runge-Kutta orde tiga:
   a. Galat per-langkah : $O(h^4)$
   b. Galat longgokan : $O(h^3)$
4. Galat metode Runge-Kutta orde empat:
   a. Galat per-langkah : $O(h^5)$
   b. Galat longgokan : $O(h^4)$

3. Metode Euler

Metode Euler adalah suatu metode satu langkah yang paling sederhana. Dibanding dengan beberapa metode lainnya, metode ini paling kurang teliti. Namun demikian metode ini perlu dipelajari mengingat kesederhanaannya dan mudah pemahamannya sehingga memudahkan dalam mempelajari metode lain yanng lebih teliti. Metode Euler atau disebut juga metode orde pertama karena persamaannya hanya mengambil sampai suku orde pertama saja.

Diberikan PDB orde satu,

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y); y(x_0) = y_0$$

misalkan

$$y_r = y(x_r)$$

adalah hampiran nilai *y* di *x* yang dihitung dengan metode Euler. Dalam hal ini

$$x_r = x_0 + rh,\ r = 0,1,2, \dots n.$$

Metode Euler diturunkan dengan cara menguraikan $y(x_{r+1})$ disekitar x_r ke dalam deret Taylor:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1}-x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1}-x_r)^2}{2!} y''(x_r) + \cdots \quad (2.26)$$

Bila persamaan (2.26) dipotong sampai suku orde tiga, diperoleh:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1}-x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1}-x_r)^2}{2!} y''(t), x_r < t < x_{r+1} \quad (2.27)$$

Berdasarkan bentuk baku,

$y'(x_r) = f(x_r, y_r)$ dan $x_{r+1} - x_r = h$

Maka persamaan (2.27) dapat ditulis menjadi

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + hf(x_r, y_r) + \frac{h^2}{2} y''(t)$$

$$y_{r+1} = y_r + hf_r$$

Analisis Galat Metode Euler:

Metode Euler mengandung dua macam galat, yaitu galat pemotongan dan galat longgokan. Galat pemotongan dapat langsung ditentukan dari persamaan:

$$E_p = \frac{1}{2} h^2 y''(t) = O(h^2)$$

Perhatikan bahwa nilai pada setiap langkah (y_r) dipakai lagi pada langkah berikutnya (y_{r+1}). Galat solusi pada langkah ke-*r* adalah tumpukan galat dari langkah-langkah sebelumnya. Galat yang terkumpul pada akhir langkah ke-*r* ini disebut galat longgokan. Jika langkah dimulai dari $x_0 = a$ dan berakhir di $x_n = b$ maka total galat yang terkumpul pada solusi akhir (y_n) adalah:

$$E_{total} = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) h^2 y''(t) = n\frac{h^2}{2} y''(t) = \frac{(b-a)}{2h} h^2 y''(t) = \frac{(b-a)}{2} y''(t)h$$

Jadi galat longgokan sebanding dengan h. Ini berarti metode Euler memberikan hampiran solusi yang buruk, sehingga dalam praktek metode ini kurang disukai, namun metode ini membantu untuk memahami gagasan dasar metode penyelesaian PDB dengan orde yang lebih tinggi.

4. Metode Heun

Metode Euler mempunyai ketelitian yang rendah, karena galatnya besar. Oleh karena itu, metode Euler diperbaiki oleh metode Heun (*modified Euler's method*). Pada metode Heun, solusi dari metode Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (*predictor*). Selanjutnya, solusi perkiraan awal ini diperbaiki dengan metode Heun (*corrector*).

Metode Heun diturunkan sebagai berikut:

Dari PDB orde satu berikut:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{2.28}$$

Jika kedua ruas persamaan (2.28) diintergrasikan dari x_i sampai x_{i+1} :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\big(x, y(x)\big)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx$$

$$= y(x_{i+1}) - y(x_i)$$

$$= y_{i+1} - y_i$$

Selanjutnya suku-suku y_{i+1} dapat dinyatakan sebagai:

$$y(x_{i+1}) = y_1 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\big(x, y(x)\big)dx \tag{2.29}$$

Suku yang mengandung integral di ruas kanan $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\big(x, y(x)\big)dx$, dapat diselesaikan dengan kaidah trapesium, sehingga menjadi:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\big(x, y(x)\big)dx = \frac{h}{2}[f(x_i, y_1) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \tag{2.30}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.30) ke persamaan (2.29), maka diperoleh

$$y_{i+1} = y_1 + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \quad (2.31)$$

Persamaan (2.31) merupakan metode Heun atau metode Euler-Cauchy yang diperbaiki. Dalam persamaan (2.31), suku ruas kanan mengandung y_{i+1}. Nilai y_{i+1} ini adalah solusi perkiraan awal (*predictor*) yang dihitung dengan metode Euler. Oleh karena itu, persamaan (2.29) dapat ditulis sebagai:

Predictor : $y_{i+1}^{(0)} = y_i + h\,f(x_i, y_i)$

Corrector : $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})\right]$ (2.32)

Atau dapat ditulis dalam kesatuan:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h\,f(x_i, y_i)] \quad (2.33)$$

Merujuk pada metode Runge Kutta orde dua yaitu pada persamaan (2.20) dan (2.21), maka metode Heun termasuk dalam metode tersebut. Hal ini dilihat dari penjelasan dibawah ini:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h \quad (2.34)$$

dengan $k_1 = f(x_iy_1)$ (2.35)

$$k_2 = f(x_i + p_1h\,, y_i + q_{11}k_1h) \quad (2.36)$$

Nilai a_1, a_2, p_1 dan q_{11} dievaluasi dengan menyamakan persamaan (2.35) dengan deret Taylor orde 2, yang mempunyai bentuk:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + f'(x_i, y_i)\frac{h^2}{2} \quad (2.37)$$

Dengan $f'(x_i, y_i)$ dapat ditentukan dari hukum berantai (*chain rule*) berikut:

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \quad (2.38)$$

dengan mensubtitusikan persamaan (2.38) kedalam persamaan (2.37), maka dihasilkan:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] + \frac{h^2}{2} \quad (2.39)$$

Dalam metode Runge Kutta orde dua ini, dicari nilai a_1, a_2, p_1 dan q_{11} sedemikian sehingga persamaan (2.34) ekivalen dengan persamaan (2.38). oleh karena itu digunakan deret Taylor untuk mengembangkan persamaan (2.36). deret Taylor untuk fungsi dengan dua variabel mempunyai bentuk:

$$g(x+r, y+s) = g(x,y) + r\frac{\partial g}{\partial x} + s\frac{\partial g}{\partial y} + \cdots$$

dengan cara tersebut persamaan (2.34) dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x_i + p_i h, y_i + q_{11}k_1 h) = f(x_i, y_i) + p_i h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11}k_1 h\frac{\partial f}{\partial y} + o(h^2)$$

Bentuk diatas dan persamaan (2.35) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.34) sehingga menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h\, f(x_i, y_i) + a_2 h\, f(x_i, y_i) + a_2 h^2\frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} h^2\, f(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial x} + o(h^3)$$

atau

$$y_{i+1} = y_i + [a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)]h + \left[a_2 p_1\frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial x}\right]h^2 + o(h^3) \tag{2.40}$$

Dengan membandingkan persamaan (2.39) dan (2.40), dapat disimpulkan bahwa persamaan akan ekivalen apabila:

$$a_1 + a_2 = 1 \tag{2.41}$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2} \tag{2.42}$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \tag{2.43}$$

Sistem persamaan diatas terdiri dari tiga persamaan yang mengandung empat bilangan tak diketahui, sehingga tidak bisa diselesaikan. Oleh karena itu salah satu bilangan tak diketahui tersebut ditetapkan dan kemudian dicari ketiga bilangan yang lain. Dianggap bahwa a_2 ditetapkan, sehingga persamaan (2.41) sampai (2.51) dapat diselesaikan sehingga dihasilkan:

$$a_1 = 1 - a_2 \tag{2.44}$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2} \tag{2.45}$$

Karena nilai a_2 dapat dipilih sembarang, maka akan terdapat banyak metode Runge Kutta orde dua, diantaranya metode Heun, metode Poligon dan metode Ralston. Untuk metode Heun, a_2 dianggap $1/2$, maka persamaan (2.43) dan (2.45) dapat diselesaikan dan diperoleh:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = q_{11} = 1$$

Parameter tersebut apabila disubstitusikan ke dalam persamaan (2.37) akan menghasilkan:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

dengan

$$k_1 = f(x_i y_1)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Analisis galat metode Heun:

Dapat dibuktikan bahwa galat per langkah metode Heun sama dengan galat kaidah trapesium, yaitu;

$$E_p = -\frac{h^2}{12}y''(t) \qquad , x_r, < t < x_{r+1}$$

$$= \mathrm{O}(h^2)$$

Bukti :

Misalkan,

y_{r+1}adalah nilai y sejati di x_{r+1}

y_{r+1} adalah hampiran nilai y di x_{r+1}

Uraikan y_{r+1} disekitar x_r

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1}-x_r)^2}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1}-x_r)^2}{2!} y''(x_r) + \frac{(x_{r+1}-x_r)^3}{3!} y'''(x_r) + \dots$$

$$y_r + hy_r' + \frac{h^2}{2} y_r'' + \frac{h^3}{6} y_r''' + \cdots$$

Dapat menyatakan $y_r' = f(x_r, y_r) = f_r$ maka:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2}[f(x_r, y_r) + f\left(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)}\right)]$$

Uraikan $f\left(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)}\right)$ dengan menggunakan deret Taylor di sekitar x_r:

$$f\left(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)}\right) = f(x_{r+1}, y_{r+1})$$

$$= f(x_r, y_r) + \frac{(x_{r+1}-x_r)^2}{2!} f'^{(x_r, y_r)} + \frac{(x_{r+1}-x_r)^2}{2!} f''^{(x_r, y_r)} + \cdots$$

Sehingga dapat ditulis menjadi:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2}[f(x_r, y_r) + f\left(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)}\right)]$$

$$= y_r + \frac{h}{2}[f_r + f_r + hf_r' + \frac{1}{2}h^2 f_r'' + \cdots]$$

$$= y_r + hf_r + \frac{h^2}{2} f_r' + \frac{h^3}{4} f_r'' + \cdots$$

Galat per langkah = nilai sejati –nilai hampiran

$$= Y_{r+1} - y_{r+1}$$

$$= \left(y_r + hf_r + \frac{h^2}{2} f_r' + \frac{h^3}{6} f_r''' + \cdots\right) - \left(y_r + hf_r + \frac{h^2}{2} f_r' + \frac{h^3}{4} f_r'' + \cdots\right)$$

$$= \frac{h^3}{6} f_r''' - \frac{h^3}{4} f_r'' + \cdots$$

$$= -\frac{h^3}{12} f_r'''$$

$= -\frac{h^3}{12} f_r'''(t),\ x_r, < t < x_{r+1}$

$= O(h^3)$

Galat longgokannya adalah

$E_L = \sum_{r=1}^{n} -\frac{1}{12} h^3 y''(t)$

$= -\frac{(b-a)}{12} h^2 y''(t)$

$= O(h^2)$

F. Galat

Penyelesaian numerik memberikan hasil dengan perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian eksak, sehingga terdapat kesalahan (galat) terhadap nilai eksaknya. Galat adalah perbedaan antara nilai eksak dengan nilai hampiran. Tetapi dalam metode numerik, nilai eksak biasanya tidak diketahui. Bentuk umum dari galat adalah:

$\mathcal{E} = a - \hat{a}$

Oleh karena itu, galat dapat juga dinyatakan berdasarkan solusi hampirannya, sehingga galat relatifnya dinamakan galat relatif hampiran:

$$\varepsilon_{RH} = \frac{\varepsilon}{y_n}$$

dengan :

$\varepsilon =$ galat terhadap nilai eksak

$y_n =$ nilai hampiran

Pada perhitungan numerik sering dilakukan pendekatan secara iterasi, dengan kesalahan numeriknya, ialah:

$$\varepsilon_{RH} = \frac{y_n^{r+1} - y_n^r}{y_n^{r+1}}$$

Dengan :

r = iterasi untuk corrector yang lebih baik

y_n^r = nilai hampiran pada iterasi r

y_n^{r+1} = nilai hampiran pada iterasi ke r+1

Proses iterasi dihentikan apabila $|\varepsilon_{RH}| < \varepsilon_s$, ε_s adalah nilai galat yang diinginkan. Nilai dari ε_s menentukan keelitian suatu masalah. Semakin kecil nilai ε_s, maka semakin teliti solusinya, tetapi semakin banyak proses iterasi.Terdapat tiga macam galat, yaitu galat bawaan, galat pembulatan, galat pemotongan.

Galat bawaan adalah galat dari nilai data. Galat tersebut bisa terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau galat karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur.

Galat pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angkat terakhir dari suatu bilangan. Galat ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan unutk menggantikan bilangan eksak.

Sedangkan galat pemotongan terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Sebagai contoh, suatu proses tak terhingga diganti dengan proses berhingga.