BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

A. Persamaan Diferensial

Banyak masalah yang sangat penting dalam ilmu mesin, ilmu fisika, ilmu sosial dan yang lainnya, ketika memformulakan dalam bentuk matematika mensyaratkan fungsi yang memenuhi persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Persamaan-persamaan di atas disebut persamaan diferensial (Wahyu dalam Nur, dkk, 2015).

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung fungsi dan turunan. Persamaan matematika tidak bisa terpisahkan dengan kehidupan sehari-hari. Suatu persamaan matematika perlu dianalisis. Bentuk persamaannya salah satunya adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah suatu relasi yang menyangkut satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tak diketahui dan mungkin fungsi itu sendiri (Maya dan Rachmawati, 2018:1).

Bentuk umum persamaan diferensial yaitu:

$$f(x).dx + g(y).dy = 0$$

Berikut merupakan contoh persamaan diferensial (Lestari, 2013: 2):

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$
2. $\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$

Selanjutnya, persamaan diferensial dapat pula dinotasikan sebagai $y' = \frac{dy}{dx}$ atau $x' = \frac{dx}{dt}$. Penyelesaian persamaan diferensial adalah fungsi yang turunannya termuat dalam persamaan tersebut. Jika fungsi tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial akan menghasilkan suatu identitas. Persamaan diferensial mempunyai dua macam penyelesaian, yaitu penyelesaian umum dan penyelesaian khusus.

Penyelesaian umum adalah penyelesaian yang masih memuat konstanta, sedangkan penyelesaian khusus adalah penyelesaian yang sudah tidak memuat konstanta. Penyelesaian khusus ditentukan dengan bantuan syarat bantu, yaitu syarat awal (nilai awal) atau syarat batas. Persamaan diferensial disajikan beserta syarat awalnya seperti berikut

$$x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$$

disebut masalah nilai awal. Penyelesaian masalah nilai awal adalah penyelesaian dari permasalahan diferensial yang memenuhi syarat awal yang diberikan. Jika permasalahan tersebut dapat diselesaikan secara analitik, maka penyelesaian yang dihasilkan disebut penyelesaian sejati (penyelesaian yang sesungguhnya).

Namun, terkadang masalah nilai awal muncul dalam bentuk yang rumit, sehingga tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik. Jika metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka penyelesaian tersebut dapat dicari dengan metode numerik. Penyelesaian yang dihasilkan metode numerik disebut penyelesaian hampiran (pendekatan terhadap penyelesaian sejati). Penyelesaian hampiran tidak tepat sama dengan penyelesaian sejati, sehingga ada selisih antara keduanya.

Istilah-istilah dalam persamaan diferensial yaitu:

- Orde (tingkat) persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi turunan yang muncul pada persamaan diferensial tersebut.
- Degree (derajat) persamaan diferensial adalah bentuk polynomial (suku banyak) yang terdapat pada turunan tingkat tertinggi dan muncul pada persamaan diferensial tersebut.

Contoh:

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y - \cos x = 0$; persamaan diferensial orde 2 derajat 1.

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2(\frac{dy}{dx})^3 + 3y - \sin x = 0$; persamaan diferensial orde 2 derajat 1.

$(\frac{d^2y}{dx^2})^4 + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$; persamaan diferensial orde 2 derajat 4.

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) - \frac{dy}{dx} - 3y = 0$; persamaan diferensial orde 3 derajat 2.

Notasi $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ dapat digunakan untuk menyatakan berturut-turut derivative pertama, kedua, ketiga,…, dan derivative ke-n. Dari variabel bebas y terhadap suatu variabel bebas.

B. Penyelesaian Persamaan Diferensial

Solusi yang diperoleh dari metode ini adalah solusi hampiran (solusi pendekatan/aproksimasi). Dengan bantuan program komputer, metode ini dapat menyelesaikan PDB dari tingkat sederhana sampai pada masalah yang komplek.

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan metematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Solusi yang dihasilkan dari metode numerik berupa aproksimasi atau pendekatan atau hampiran berbentuk angka dan dapat dibuat seteliti mungkin.

Metode ini digunakan untuk memperoleh nilai pendekatan dari penyelesaian yang berhubungan dengan nilai *x*. Anggap *y* merupakan penyelesaian dari masalah

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0$$

Anggap h merupakan positif increment di *x*, dan $y_1, y_2, \ldots$, merupakan nilai pendekatan dari y di $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \ldots$. Mulai dengan kondisi yang diketahui di (1) maka $y_1, y_2, \ldots$ diperoleh.

Sebuah metode yang hanya memerlukan y_n agar diperoleh y_{n+1} disebut *starting method*. Diketahui $y_1, y_2, y_3, \ldots$. Metode ini memerlukan y_n dan satu atau lebih nilai terdahulu $y_{n-1}, y_{n-2} \ldots$ untuk memperoleh nilai y_{n+1}. Metode ini disebut *continuing method*. Di dalam metode numerik, keakuratan dan kesalahan dalam menyelesaikan persoalan tidak terlalu dipertimbangkan.

Secara umum formulasi yang digunakan dalam metode numerik adalah untuk menentukan nilai dari suatu fungsi yang telah tertentu. Penentuan yang dilakukan di antara dua atau lebih data yang telah diketahui dikenal sebagai intepolasi, sedangkan penentuan diluar data yang telah diketahui dikenal sebagai ekstrapolasi (Hidayatullah dan M. Hariastuti, 2017: 12).

Metode numerik:

- Menggunakan aritmatika seperti tanda +, -, *, dan /.
- Hasilnya berupa angka.
- Nilai perhitungan adalah hampiran, tidak exact.
- Solusi selalu dapat diperoleh dengan bantuan program komputer.

Kelebihan metode numerik:

- Selalu dapat memperoleh solusi persoalan.
- Dengan bantuan komputer, perhitungan cepat dan hasilnya dapat dibuat sedekat mungkin dengan nilai sesungguhnya.
- Tampilan hasil perhitungan dapat disimulasikan.

Kekurangan metode numerik:

- Nilai yang diperoleh adalah hampiran dan bukan nilai exact.
- Tanpa bantuan alat hitung, perhitungan umumnya lama dan berulang-ulang.

C. Jenis-Jenis Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial yang terbentuk dari berbagai permasalahan yang ada dapat dibedakan dalam beberapa bagian. Ada dua macam persamaan diferensial, yaitu persamaan diferensial parsial dan persamaan diferensial biasa.

1. Persamaan Diferensial Parsial (PDP) –*Partial Differential Equations* (PDE)

Persamaan Diferensial Parsial adalah persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu peubah bebas. Turunan fungsi terhadap setiap peubah bebas dilakukan secara parsial. Berikut contoh persamaan diferensial parsial (PDP):

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xye^{x+y}$ (yang dalam hal ini, *u=g(x,y)*)
2. $\frac{\partial u}{\partial t} = 3\sin(x+t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (yang dalam hal ini, *u=g(x,y,t)*)

Peubah bebas untuk contoh 1 adalah *x* dan *y*, sedangkan peubah terikatnya adalah u, yang merupakan fungsi dari *x* dan *y*, atau ditulis sebagai *u =g(x,y)*. Sedangkan peubah bebas untuk contoh 2 adalah *x, y*, dan *t*, sedangkan peubah terikatnya adalah *u*, yang merupakan fungsi dari *x, y*, dan *t*, atau ditulis sebagai *u = g(x, y, t)*.

2. **Persamaan Diferensial Biasa (PDB)** – *Ordinary Differential Equations* (ODE)

Persamaan Diferensial Biasa adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu peubah bebas. Peubah bebas biasanya disimbolkan dengan *x*. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial di mana fungsi yang tidak diketahui (variabel terikat) adalah fungsi dari variabel bebas tunggal. Dalam bentuk paling sederhanafungsi yang tidak diketahui ini adalah fungsi riil atau fungsi kompleks, tetapi secara umum bisa juga berupa fungsi vektor maupun matriks. Berikut contoh persamaan diferensial biasa (PDB):

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

$$xy'' + x^2y' + 6y = e^x$$

$$y' + xy^2 = 1$$

Contoh tersebut merupakan persamaan diferensial biasa, karena variabel tak bebas y hanya bergantung pada variabel bebas x.

Berdasarkan turunan tertinggi yang terdapat di dalam persamaannya, persamaan diferensial biasa dapat dikelompokkan lagi menurut ordenya, yaitu:

a. PDB orde 1, yaitu persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya adalah turunan pertama.

Contoh: $x\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$

b. PDB orde 2, yaitu persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya adalah turunan kedua.

Contoh: $xy\frac{d^2y}{dx^2} - y^2 \sin x = 0$

c. PDB orde 3, yaitu persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya adalah turunan ketiga.

Contoh: $\frac{d^3y}{dx^3} - y\frac{dy}{dx} + 3^{4x} = 0$

d. dan seterusnya untuk persamaan diferensial biasa dengan orde yang lebih tinggi. PDB orde ke 2 ke atas dinamakan juga persamaan diferensial biasa orde lanjut.

Suatu persamaan diferensial biasa orde-n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$F[x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^n(x)] = 0$$

Persamaan di atas menyatakan hubungan antara peubah x, fungsi u dan turunannya u’,u’’,u’’’,…,u^n. Untuk selanjutnya akan digunakan variabel y sebagai $u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^n(x)$, sehingga dapat ditulis dalam bentuk: $F(x, y', y'', \dots, y^n) = 0$.

Persamaan diferensial biasa muncul dalam berbagai keadaan, termasuk geometri, mekanika, astronomi dan pemodelan populasi. Banyak matematikawan ternama telah mempelajari persamaan diferensial dan memberi sumbangan terhadap bidang studi ini, termasuk Isaac Newton, Gottfried Leibniz, keluarga Bernoulli, Riccati, Clauiraut, d’Alembert dan Euler.

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) terbagi dalam dua jenis solusi yaitu:

1. Solusi Umum (Penyelesaian Umum): solusi PDB yang masih mengandung konstanta sebarang misalnya c.
2. Solusi Khusus/Partikular (Penyelesaian Khusus/Partikular): solusi yang tidak mengandung konstanta variabel karena terdapat syarat awal pada suatu persamaan diferensial biasa.

Contoh:

Persamaan Diferensial: $y'' - y' - 2y = 0$

Penyelesaian Umun Persamaan Diferensial (PUPD): $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

Jika c_1 dan c_2 masing-masing diberi harga $c_1 = 2$ dan $c_2 = 1$, maka Penyelesaian Khusus/ Partikular Persamaan Diferensial (PKPD): $y = 2e^{-x} + e^{2x}$

Berdasarkan kelinearannya, terdapat persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial tidak linear.

3. Persamaan Diferensial Linear

Sebuah persamaan diferensial termasuk persamaan diferensial linier jika memenuhi dua hal berikut:

a. Variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi berpangkat satu dan tidak terdapat fungsi transenden dalam bentuk peubah tak bebas, serta $a_n(x)$ adalah fungsi kontinu.

b. Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan.

Jadi istilah linear berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, peubah-peubah $y, y', \dots, y^n$ berderajat satu atau nol.

4. Persamaan Diferensial Tidak Linear

Persamaan diferensial yang bukan persamaan diferensial linear. Dengan demikian persamaan diferensial $F\left(x, y', \dots, y^{(m)}\right) = 0$ adalah persamaan diferensial tak linear, jika salah satu dari berikut dipenuhi oleh :

- F tidak berbentuk polinom dalam $y, y', \dots, y^{(m)}$
- F tidak berbentuk polinom berpangkat lebih dari 2 dalam $y, y', \dots, y^{(m)}$

Berdasarkan bentuknya, terdapat persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial tak homogen.

5. Persamaan Diferensial Homogen

Fungsi $F(x, y)$ disebut fungsi homogen bila terdapat $n \in R$ sehingga berlaku $F(kx, ky) = k^n F(x, y)$, dengan n disebut order dari fungsi homogen $F(x, y)$. Ciri umum PD Homogen adalah tiap suku derajatnya sama. Bentuk persamaan persamaan diferensial homogen yaitu

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

atau

$$f(x, y) = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)} = t^0 f(x, y)$$

disebut persamaan diferensial homogen orde satu, jika M dan N adalah fungsi homogen yang berderajat sama, atau f fungsi homogen berderajat nol.

6. Persamaan Diferensial Tak Homogen

Persamaan diferensial tak homogen adalah persamaan diferensial yang mempunyai bentuk

$$(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0$$

dengan a, b, c, p, q, r adalah konstanta. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut, maka terlebih dahulu harus perhatikan kemungkinan-kemungkinan yang terjadi, yaitu:

(a) Jika $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ atau $aq - bp \neq 0$

(b) Jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ atau $aq - bp = 0$

(c) Jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = m$

Persamaan diferensial tak homogen dapat diselesaikan jika telah diubah menjadi persamaan diferensial homogen.

Ada beberapa jenis persamaan diferensial menurut (Ayuninghemi dan Kepakisan, 2009: 3):

(1) Persamaan diferensial orde satu ditulis dalam bentuk persamaan (2.1) berikut:

$F(x,y)\frac{dy}{dx} + \emptyset(x,y) = 0$ atau bisa juga ditulis:

$$F(x,y)dy + \emptyset(x,y)dx = 0 \quad (2.1)$$

(2) Persamaan diferensial yang ditulis dalam bentuk persamaan (2.2) berikut:

$$\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R \quad (2.2)$$

(3) Persamaan diferensial orde satu derajat tinggi yang ditulis dalam bentuk persamaan (2.3) berikut:

$$f\left(xy, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (2.3)$$

(4) Persamaan diferensial orde tinggi yang ditulis dalam bentuk persamaan (2.4) berikut:

$$a_0 \frac{d^n y}{d^y} + a_1 \frac{d^n y}{dx^n} + a_n y_n = f(x) \quad (2.4)$$

D. Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Metode Numerik

Ada beberapa macam metode numerik yang bisa digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa, yaitu:

1. Metode Deret Taylor

Deret Taylor dalam matematika adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret ini dapat dianggap sebagai limit polynomial Taylor. Deret Taylor mendapat nama dari matematikawan Inggris Brook Taylor. Bila deret tersebut terpusat di titik nol, deret tersebut dinamakan sebagai deret Maclaurin, dari nama matematikawan Skotlandia Colin Maclaurin.

Deret Taylor dari sebuah fungsi riil atau fungsi kompleks $f(x)$ yang terdiferensialkan tak hingga dalam sebuah pemetaan sebuah bilangan riil atau kompleks a adalah deret pangkat

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

yang dalam bentuk lebih ringkas dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

dengan $n!$ melambangkan factorial n dan $f^{(n)}(a)$ melambangkan nilai dari turunan ke-n dari f pada titik a. Turunan ke nol dari f didefinisikan sebagai f itu sendiri, dan $(x-a)^0$ dan 0! didefinisikan sebagai 1.

Analisis Galat Metode Deret Taylor

Galat perlangkah metode deret Taylor setelah pemotongan ke-n adalah

$$E_t = \frac{h^{(n+1)} f^{(n+1)}}{(n+1)!}(t), \quad x_0 < t < x_{r+1}$$
$$= O(h^{n+1})$$

Galat longgokan total total metode deret Taylor adalah:

$$E_t = \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$
$$= \frac{b-a}{h} \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$
$$= (b-a) \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} h^n$$
$$= O(h^n)$$

2. Metode Runge-Kutta

Dalam analisis numerik, metode Runge-Kutta adalah keluarga metode iterative implisit dan eksplisit, yang mencakup rutin terkenal yang disebut metode Euler, yang digunakan dalam diskretisasi temporal untuk solusi perkiraan persamaan diferensial biasa. Metode ini dikembangkan sekitar tahun 1900 oleh matematikawan Jerman Carl Runge Wilhelm Kutta.

Anggota keluarga Runge-Kutta yang paling dikenal secara umum disebut sebagai "RK4", "metode Runge-Kutta" klasik atau hanya sebagai "metode Runge-Kutta". Metode RK4 adalah metode urutan keempat, yang berarti bahwa kesalahan pemotongan lokal ada di urutan $O(h^5)$, sedangkan total akumulasi kesalahan ada di urutan $O(h^4)$.

Metode Runge-Kutta mempunyai tiga sifat utama, yaitu:

1. Metodenya satu langkah, yang berarti bahwa untuk mencapai titik y_{i+1} hanya diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu titik x_i, y_i.
2. Mendekati ketelitian deret Taylor sampai suku dalam h^p, dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan p ini disebut derajat dari metode.
3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f(x, y)$, tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde n adalah:

$\emptyset = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$

dengan $k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$

$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h$

…

$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$

(Hasanah, 2009).

Analisis Galat Metode Runga-Kutta

1. Galat metode Runge-Kutta orde satu
   a. Galat per-langkah : $O(h^2)$
   b. Galat longgokan : $O(h)$
2. Galat metode Runge-Kutta orde dua
   a. Galat per-langkah : $O(h^3)$
   b. Galat longgokan : $O(h^2)$

3. Galat metode Runge-Kutta orde tiga
    a. Galat per-langkah : $O(h^4)$
    b. Galat longgokan : $O(h^3)$
4. Galat metode Runge-Kutta orde empat
    a. Galat per-langkah : $O(h^5)$
    b. Galat longgokan : $O(h^4)$

3. Metode Heun

Dalam matematika dan komputasi, metode Heun dapat merujuk pada peningkatan atau metode Euler yang dimodifikasi (yaitu, aturan trapezium eksplisit), atau metode Runge-Kutta dua tahap yang serupa. Namanya Karl Heun dan merupakan prosedur numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan nilai awal yang diberikan. Kedua vaian dapat dilihat sebagai ekstensi metode Euler menjadi metode Runge-Kutta orde dua tahap kedua.

Prosedur untuk menghitung solusi numerik untuk masalah nilai awal:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad y(t_0) = y_0$$

dengan cara metode Heun, adalah pertama enghitung nilai antara $\tilde{y}_{i+1}$ dan kemudian perkiraan akhir y_{i+1} pada titik integrasi berikutnya.

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]$$

dimana h adalah ukuran langkah dan

$$t_{i+1} = t_i + h.$$

Analisis Galat Metode Heun

Pada metode Heun, solusi dari metode Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (*predictor*). Selanjutnya solusi perkiraan awal ini diperbaiki dengan menggunakan metode Heun (*corrector*) ,(Yeremia,hal.2) . Penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode Heun merupakan suatu proses mencari nilai fungsi y pada titik t

tertentu dari persamaan diferensial biasa $f(t,y)$. Diberikan suatu persamaan diferensial orde satu yang memenuhi syarat awal $y(t_0) = y_0$,

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) diintegralkan pada kedua sisinya dengan batasan dari t_i sampai t_{i+1} dengan $h = t_{i+1} - t_i$, maka diperoleh

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt$$

$$y(t)|_{t_i}^{t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt$$

$$y(t_{i-1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i-1}} f\big(t, y(t)\big)dt$$

$$y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt \tag{2.6}$$

Selanjutnya, integral ruas kanan yaitu $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt$ dapat diselesaikan dengan mengajukan kaidah trapesium, yaitu:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)dt = \frac{[f(t_i,y_i) + f(t_{i+1},y_{i+1})]}{2}(t_{i+1}, t_i)$$

$$= \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})] \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) disubstitusikan ke persamaan (2.6) sehingga diperoleh suatu formula yang dinamakan metode Heun:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})] \tag{2.8}$$

dengan: $i = 0,1,2, \ldots, n$

y_{i+1} = hampiran sekarang

y_i = hampiran sebelumnya

h = ukuran langkah

Pada persamaan (2.8) suku ruas kanan mengandung y_{i+1}. Nilai dari y_{i+1} ini merupakan solusi perkiraan awal (*predictor*) yang dihitung dengan metode Euler, persamaan Heun dapat ditulis:

Predictor : $y_{i+1}^{(0)} = y_1 + hf(t_i, y_i)$

Corrector : $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})\right]$

Persamaan metode Heun dapat juga diselesaikan dengan menggunakan iterasi yaitu:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})\right]$$

dengan $k = 1,2,3, \dots$

$i = 0,1,2,3, \dots$

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu dengan dua variabel tak bebas:

$$\dot{x} = f(t, x, y)$$

$$\dot{y} = g(t, x, y)$$

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$$

Dengan $h = h_{i+1} - t_i$, maka formula Heun untuk suatu sistem persamaan berikut:

Predictor : $x_{i+1}^{(0)} = x_i + hf(t_i, x_i, y_i)$

$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hg(t_i, x_i, y_i)$

Corrector : $x_{i+1}^{(k)} = x_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, x_i, y_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1}^{(k-1)}, y_{i+1}^{(k-1)})\right]$

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[g(t_i, x_i, y_i) + g(t_{i+1}, x_{i+1}^{(k-1)}, y_{i+1}^{(k-1)})\right]$$

(Oktaviani,dkk, 2014:33).

Galat per langkah = nilai sejati – nilai hampiran

$$= Y_{r+1} - y_{r+1}$$

$$= (y_r + hf_r + \frac{h^2}{2}f_r' + \frac{h^3}{6}f_r''' + \cdots) - (y_r + hf_r + \frac{h^2}{2}f_r' + \frac{h^3}{4}f_r'' + \cdots)$$

$$= \frac{h^3}{6}f_r''' - \frac{h^3}{4}f_r''' + \cdots$$

$$= -\frac{h^3}{12}f_r''' + \cdots$$

$$= -\frac{h^3}{12}f_r'''(t), \quad x_r < t < x_{r+1}$$

$= O(h^3)$

Galat longgokannya adalah

$$E_L = \sum_{r=1}^{n} -\frac{1}{12} h^3 y''(t)$$

$$= -\frac{(b-a)}{12} h^2 y''(t)$$

$$= O(h^2)$$

4. Metode Euler

Metode Euler adalah salah satu metode satu langkah yang paling sederhana. Dibanding dengan beberapa metode lainnya, metode ini paling kurang teliti. Namun demikian metode ini perlu dipelajari mengingat kesederhanaannya dan mudah pemahamannya sehingga memudahkan dalam mempelajari metode lain yang lebih teliti. Metode Euler atau disebut juga metode orde pertama karena persamaannya hanya mengambil sampai suku orde pertama saja. Misalnya diberikan PDB orde satu,

$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ dan nilai awal $y(x_0) = x_0$

Misalkan

$$y_r = yx_r$$

adalah hampiran nilai di x_r yang dihitung dengan metode euler. Dalam hal ini $x_r = x_0 + rh,$ r = 1, 2, 3, …, n

metode euler diturunkan dengan cara menguraikan $y(x_{r+1})$ di sekitar x_r ke dalam deret taylor:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(x_r) + \cdots \qquad (1)$$

bila persamaan di atas dipotong sampai suku orde tiga, diperoleh

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(t), \quad x_r < t < x_{r+1} \qquad (2)$$

berdasarkan persamaan bentuk baku PDB orde satu maka

$$y'(x_r) = f(x_r, y_r)$$

dan

$$x_{r+1} - x_r = h$$

maka persamaan (2) dapat ditulis menjadi:

$$y(x_{r+1}) \approx y(x_r) + \mathrm{h}f(x_r, y_r) + \frac{\mathrm{h}^2}{2} y''(t) \qquad (3)$$

dua suku pertama persamaan di atas yaitu:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + hf(x_r, y_r)\ ; \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad (4)$$

atau dapat ditulis

$$y_{r+1} = y_r + hf_r$$

Yang merupakan metode Euler.

Bentuk persamaan diferensial berikut:

$y' = f(x, y)$ dan y adalah fungsi dalam x.

Dengan menggunakan pendekatan nilai awal (x_0, y_0) maka nilai-nilai y berikutnya dapat diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$ (Maiyena, 2011: 177)

Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa:

1. Masukan yang diperlukan dalam mnyelesaikan persamaan diferensial dengan menggunakan metode Euler adalah:
   - Nilai pendekatan awal (x_0, y_0)
   - Jumlah iterasi N
   - Step h
2. Keluaran yang dihasilkan oleh metode ini adalah nilai-nilai y pada setiap x yang bertambah dengan step h.
3. Bila x dan y ditabelkan akan dapat dibentuk grafik dari hasil penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

Algoritma dari Metode Euler:

(1) Definisikan model dari persamaan diferensial dalam $f(x, y)$

(2) Masukkan nilai pendekatan awal x_0 dan y_0

(3) Masukkan nilai maksimum iterasi N dan nilai step h

(4) Untuk n = 0 sampai dengan N

- $x_n = x_0 + h * n$
- $y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n)$

(5) Tampilkan nilai x_n dan y_n dalam bentuk tabel untuk n = 0 s/d N.

Analisis Galat Metode Euler

Meskipun metode Euler sederhana, tetapi ia mengandung dua macam galat, yaitu galat pemotongan (*truncation error*) dan galat longgokan (*cumulative error*). Galat pemotongan dapat langsung ditentukan dari persamaan

$$y(x_{r+1}) \approx y(x_r) + \mathrm{h} f(x_r, y_r) + \frac{\mathrm{h}^2}{2} y''(t)$$

yaitu

$$E_p \approx \frac{1}{2} h^2 y''(t) = O(h^2) \qquad (3.7)$$

Galat pemotongan ini sebanding dengan kuadrat ukuran langkah *h* sehingga disebut juga galat per langkah (*error per step*) atau galat lokal. Semakin kecil nilai *h* (yang berarti semakin banyak langkah perhitungan), semakin kecil pula galat hasil perhitungannya. Perhatikan bahwa nilai pada setiap langkah (y_r) dipakai lagi pada langkah berikutnya (y_{r+1}). Galat solusi pada langkah ke-*r* adalah tumpukan galat dari langkah-langkah sebelumnya. Galat yang terkumpul pada akhir langkah ke-*r* ini disebut galat longgokan (*cumulative error*). Jika langkah dimulai dari $x_0=a$ dan berakhir di $x_n=b$ maka total galat yang terkumpul pada solusi akhir (y_n) adalah

$$E_{total} = \sum_{r=1}^{n} \left(1/2\right) h^2 y''(t) = n \frac{\mathrm{h}^2}{2} y''(t) = \frac{(b-a)}{2\mathrm{h}} y''(t)\mathrm{h} \qquad (3.8)$$

Galat longgokan total ini sebenarnya adalah

$$E_{total} = y(b)_{sejati} - y(x_n) Euler$$

Persamaan (3.3) menyatakan bahwa galat longgokan sebanding dengan *h*. Ini berarti metode Euler memberikan hampiran solusi yang buruk, sehingga dalam praktek metode ini kurang disukai, Namun metode ini membantu untuk memahami gagasan dasar metode penyelesaian PDB dengan orde yang lebih tinggi. Pengurangan *h* dapat meningkatkan ketelitian hasil, namun pengurangan *h* tanpa penggunaan bilangan berketelitian ganda tidaklah menguntungkan karena galat numerik meningkat disebabkan oleh galat pembulatan.

Selain galat pemotongan, solusi PDB juga mengandung galat pembulatan, yang mempengaruhi ketelitian nilai $y_1, y_2, \ldots$, semakin lama semakin buruk dengan meningkatnya *n*.

E. Galat

Galat dapat disebut juga error atau dalam keseharian dapat disebut sebagai kesalahan, kesalahan yang dimaksud di sini adalah kesalahan dalam proses pengambilan data. Galat atau error dapat juga didefinisikan sebagai selisih dari nilai atau hasil yang kita harapkan terjadi (*expected value*) dengan observasi atau kenyataan yang terjadi di lapangan. (Ermawati, dkk, 2017:17) galat atau biasa disebut *error* dalam metode numerik adalah selisih antara nilai yang ditimbulkan antara nilai sebenarnya dengan nilai yang dihasilkan dengan metode numerik. *Galat* dapat berfungsi untuk menunjukkan efisiensi dari satu jenis percobaan atau penelitian ke penelitian yang lain. Secara normal, kita menginginkan galat yang bernilai kecil bahkan tidak terjadi galat. Namun ketiadaan galat juga dapat menyebabkan pertanyaan dalam penelitian kita.

Menganalisis galat sangat penting di dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Misalkan â adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a, maka selisih

$$\varepsilon = a - \hat{a}$$

disebut galat (Maharani, 2018:10).